2020 年 2 月 25 日
河合康典

2019 年度 制御工学 I 学年末試験 (模範解答)
2020 年 2 月 25 日 2 限 (11:10-12:30)

注意： 途中計算や考え方が解答欄に記入されていない場合は減点とする。

[問題 1] (配点 30 点)*学生の到達目標 (5)

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき, システムが安定か否かラウスの安定判別法またはフルビッツの安定判別法の いずれかを用いて 判別せよ。

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

[解答]

ラウスの安定判別法

係数はすべて正: 10点
計算ミス: -2点

係数はすべて正 である。

ラウス表は下記のとおりになる。

s^4	1	3	1
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{6-4}{2}=1$	$\frac{2-0}{2}=1$	0
s	$\frac{4-2}{1}=2$	0	0
s^0	$\frac{2-0}{2}=1$	0	

ラウス数列はすべて正 である。よって, 安定 である。

フルビッツの安定判別法

係数はすべて正 である。

フルビッツの行列は次のようになる。

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

主座小行列式は次のようになる。

$$H_1 = 2 > 0 \tag{1-2}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0 \tag{1-3}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - (4 + 16) = 4 > 0 \tag{1-4}$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} H_3 = 4 > 0 \tag{1-5}$$

$H_1 \sim H_4$ がすべて正 である。よって, 安定 である。

【別解】

係数がすべて正であり, かつ, H_3 が正である。よって, 安定 である。

[問題 2] (配点 15 点)*学生の到達目標 (4)

図 2-1 は, ある 1 次系のステップ応答 $y(t)$ である。この 1 次系の伝達関数 $G(s)$ を答えよ。

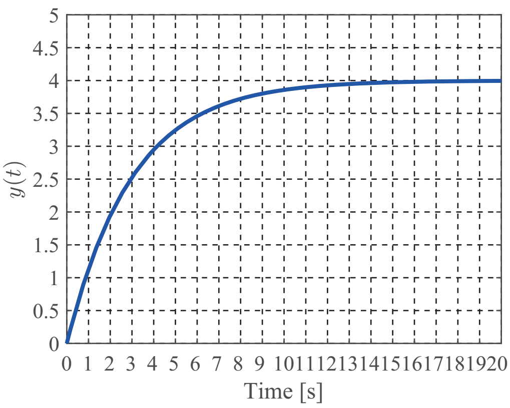

図 2-1: ステップ応答

[解答]

立ち上がり時間は, 定常値 4 の 63.2% なので, 2.524 の時間は

$$T = 3 \tag{2-1}$$

となる。また, 定常値が 4 なので

$$K = 4 \tag{2-2}$$

となる。よって, 伝達関数は,

$$G(s) = \frac{4}{3s+1} \tag{2-3}$$

となる。

ゲイン「4」，時定数「3」：
片方があっていればか8点

時定数は, 「3〜3.5」であれば○

[問題 3] (配点 15 点)*学生の到達目標 (4)

微分方程式

$$\ddot{\theta}(t) = u(t)$$

で記述される回転体に対して

$$u(t) = K_p(r(t) - \theta(t)) - K_v\dot{\theta}(t),$$
$$K_v \geq 0,\ K_p \geq 0$$

なるフィードバック制御系を構成したとする (図 3-1)。ここで，$\theta(t)$，$u(t)$，$r(t)$ は，それぞれ回転体の角度，入力トルク，および角度の目標値信号である。また，K_p，K_v は角度偏差と角速度のフィードバックゲインである。

$\underline{K_v = 2}$ と固定して，ステップ応答が振動的でない $\underline{K_p \text{ の範囲}}$ を答えよ。

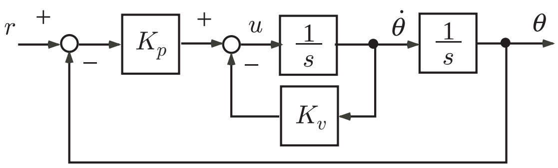

図 3-1: フィードバック制御系

[解答]

問題の式から $u(t)$ を消去し，$r(t)$ と $\theta(t)$ のみの関数にして，目標値から出力への伝達関数を求める。

$$\ddot{\theta}(t) = K_p(r(t) - \theta(t)) - K_v\dot{\theta}(t) \qquad (3\text{-}1)$$

(3-1) 式をラプラス変換する。

$$\theta(s)s^2 = K_p(r(s) - \theta(s)) - K_v\theta(s)s$$
$$(s^2 + K_v s + K_p)\theta(s) = K_p r(s) \qquad (3\text{-}2)$$

となり，

$$\theta(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_v s + K_p} r(s) \qquad (3\text{-}3)$$

が導かれる。よって，伝達関数は次にようになる。

$$\underline{\frac{K_p}{s^2 + K_v s + K_p}} \qquad (3\text{-}4)$$

よって，

$$2\zeta\omega_n = 2,\ \omega_n^2 = K_p \qquad (3\text{-}5)$$

の関係から　ここまで合っていれば8点

$$\zeta\omega_n = 1 \qquad (3\text{-}6)$$

となる。

$$\zeta = \frac{1}{\omega_n} \geq 1 \qquad (3\text{-}7)$$

のとき

$$\omega_n \leq 1 \qquad (3\text{-}8)$$

振動しない。よって，

$$\underline{K_p = \omega_n^2 \leq 1} \qquad (3\text{-}9)$$

となる。

[問題 4] (配点 10 点)*学生の到達目標 (4)

図 4-1 は 2 次系のステップ応答で，図 4-2 はその拡大図である。下記の問いに答えよ。

(1) 遅れ時間

(2) 整定時間 (±2%)

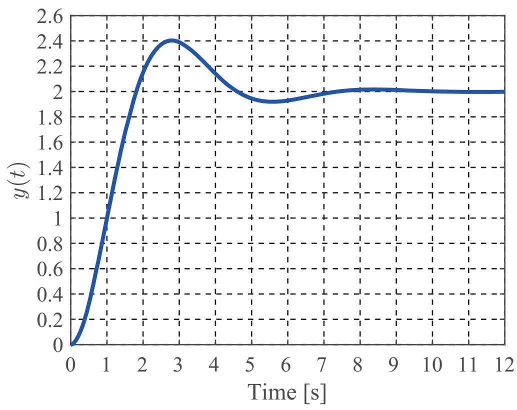

図 4-1: 2 次系のステップ応答

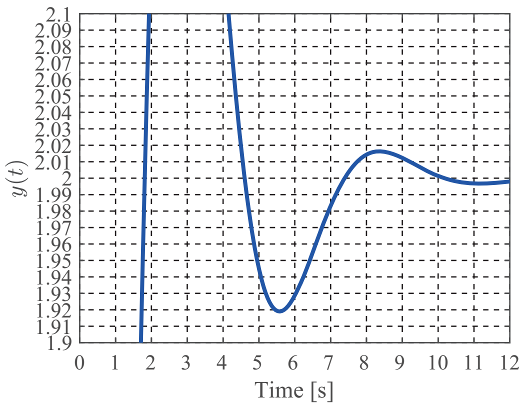

図 4-2: 図 4-1 の拡大図

[解答]

5点 (1) 定常値 2 の 50% である 1 になる時間なので遅れ時間:$\underline{1\ [\mathrm{s}]}$

5点 (2) 整定時間は，定常値の ±2% である 1.96 ∼ 2.04 に入る時間である。よって，$\underline{6.5\ [\mathrm{s}]}$

6〜7[s] はOK

理由が合っていれば3点

[問題 5] (配点 30 点 ((1):20 点,(2):10 点)*学生の到達目標 (6)

図 5-1 のフィードバック系において

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

とする。

(1) $K(s) = 4$ のとき，$d(t) = 0$ として，目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差を答えよ。

(2) $r(t) = 0$ として，ステップ外乱 $d(t) = 1$ を加えたときに定常値が 0 になる $K(s)$ を 1 つ答えて，定常値が 0 になることを示せ。

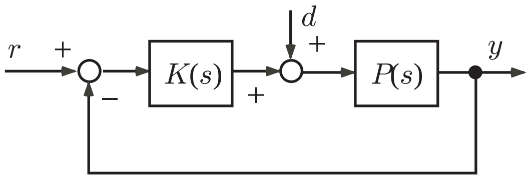

図 5-1: フィードバック制御系

[解答]

(1) $d(t) = 0$ として目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差を求める。偏差 $e(s)$ を

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{5-1}$$

とし，偏差 $e(s)$ と $y(s)$ の関係

$$y(s) = P(s)K(s)e(s) \tag{5-2}$$

から，目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - P(s)K(s)e(s) \\ (1+P(s)K(s))e(s) &= r(s) \\ \frac{e(s)}{r(s)} &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} \end{aligned} \tag{5-3}$$

よって，伝達関数 $G_{er}(s)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_{er}(s) &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} = \frac{1}{1+\frac{4}{(s+1)(s+4)}} \\ &= \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+4)+4} \end{aligned} \tag{5-4}$$

最終値の定理を用いると

$$\begin{aligned} e &= \lim_{t\to\infty} G_{er}(s)r(s) = \lim_{s\to 0} sG_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+4)+4}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1\times 4}{1\times 4+4} = \frac{4}{8} \\ &= \underline{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5-5}$$

となる。 定常値(PK/(1+PK))を求めた: 10点
計算ミス -2 or -5

(2) ステップ外乱の影響をなくすには，積分器 $\frac{1}{s}$ を 1 つ持てばよい。よって，

$$K(s) = \frac{1}{s} \tag{5-6}$$

1/s があれば 5点

ステップ外乱 $d(t) = 1$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数 G_{yd} は

$$\begin{cases} u(s) = -K(s)y(s) \\ y(s) = P(s)(d(s) + u(s)) \end{cases} \tag{5-7}$$

の関係から以下のように求まる。

$$\begin{aligned} y(s) &= P(s)d(s) - P(s)K(s)y(s) \\ (1+P(s)K(s))y(s) &= P(s)d(s) \\ y(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}\cdot d(s) \end{aligned} \tag{5-8}$$

よって，外乱 $d(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ は，次のように求められる。

$$\begin{aligned} G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{(s+1)(s+4)}}{1+\frac{1}{(s+1)(s+4)}\frac{1}{s}} \\ &= \frac{s}{s(s+1)(s+4)+1} \end{aligned} \tag{5-9}$$

よって，ステップ外乱 $d(t) = 1$ に対する定常値は，次式となる。

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s\to 0} s\cdot G_{yd}(s)d(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s(s+1)(s+4)+1}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \underline{0} \end{aligned} \tag{5-10}$$

となる。

K(s) が×，P/(1+PK) が導出されている: 5点
K(s) が○，P/(1+PK) が導出されている: 8点

1/(1+PK)の計算は0点