2019 年 12 月 2 日
河合康典

2019 年度 制御工学 I 中間試験 (模範解答)
2019 年 12 月 2 日 1 限 (9:30-10:50)

注意：暗算ができる計算以外，途中計算を省かないこと。

[問題 1] (配点 25 点 ((1):15 点,(2),(3):5 点)) *学生の到達目標 (2)

図 1-1 のようにな磁気浮上系を考える。運動方程式は

$$7\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 8 - 2\left(\frac{i(t)}{x(t)}\right)^2 \qquad (1\text{-}1)$$

となり，平衡点 (物体にかかる重力と電磁石の吸引力がつり合う状態) のまわりでの微小変化分に着目し

$$x(t) = 2 + \Delta x(t), \quad i(t) = 4 + \Delta i(t) \qquad (1\text{-}2)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

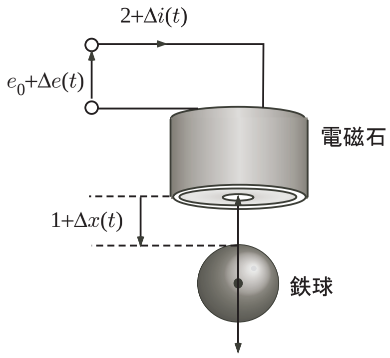


図 1-1: 磁気浮上系

(1) 運動方程式 (1-1) 式を平衡点まわりで線形化したとき，以下を満たす K_x を答えよ。

$$7\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} = K_x\Delta x(t) - 4\Delta i(t) \qquad (1\text{-}3)$$

(2) 電気回路方程式

$$2\frac{d\Delta i(t)}{dt} + 3\Delta i(t) = \Delta e(t) \qquad (1\text{-}4)$$

が与えられるとき，入力 $\Delta e(t)$ から電流 $\Delta i(t)$ までの伝達関数を求めよ。

(3) 入力 $\Delta e(t)$ からギャップ $\Delta x(t)$ までの伝達関数を答えよ。ただし，K_x は記号のままでよい。

[解答]

(1) 平衡状態では

$$2\left(\frac{4+\Delta i(t)}{2+\Delta x(t)}\right)^2\Bigg|_{\Delta i=0,\Delta x=0} = 8 \qquad (1\text{-}5)$$

より，電磁石による吸引力と物体にかかる重力が等しい。(1-2) 式を (1-1) 式へ代入して，$\frac{d^2}{dt^2}2 = 0$ を用いると

$$7\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} = 8 - 2\left(\frac{4+\Delta i(t)}{2+\Delta x(t)}\right)^2 \qquad (1\text{-}6)$$

となる。第 2 項を次のようにおく。

$$f(\Delta x(t), \Delta i(t)) = 2\left(\frac{4+\delta i(t)}{2+\delta x(t)}\right)^2 \qquad (1\text{-}7)$$

これを線形化するが，2 変数の関数のテイラー展開の公式の 1 次までを用いると

$$\begin{aligned} f(\Delta x(t), \Delta i(t)) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \Delta x(t)}(0,0)\Delta x(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \Delta i(t)}(0,0)\Delta i(t) \end{aligned} \qquad (1\text{-}8)$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Delta x(t)} &= 2\times 2\frac{4+\Delta i(t)}{2+\Delta x(t)}\frac{\partial}{\partial \Delta x(t)}\left(\frac{4+\Delta i(t)}{2+\Delta x(t)}\right) \\ &= 4\frac{4+\Delta i(t)}{2+\Delta x(t)} \times \frac{-(4+\Delta i(t))}{(2+\Delta x(t))^2} \\ &= -4\frac{(4+\Delta i(t))^2}{(2+\Delta x(t))^3} \end{aligned} \qquad (1\text{-}9)$$

となる。よって，

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta x(t)}(0,0) = -4\frac{4^2}{2^3} = -8 \qquad (1\text{-}10)$$

となる。よって，

$$\underline{K_x = 8} \qquad (1\text{-}11)$$

(2) (1-4) 式をラプラス変換すると

$$2sI(s) + 3I(s) = E(s) \qquad (1\text{-}12)$$

となり，伝達関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} (2s+3)\,I(s) &= E(s) \\ \frac{I(s)}{E(s)} &= \frac{1}{2s+3} \end{aligned} \qquad (1\text{-}13)$$

(3) $\Delta i(t)$, $\Delta x(t)$ のラプラス変換を次のように定義する。

$$I(s) = \mathcal{L}[\Delta i(t)],\ X(s) = \mathcal{L}[\Delta x(t)]$$

(1-3) 式をラプラス変換すると

$$7s^2X(s) = K_xX(s) - 4I(s) \tag{1-14}$$

となり，伝達関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(7s^2 - K_x\right)X(s) &= -4I(s) \\ \frac{X(s)}{I(s)} &= \underline{\frac{-4}{7s^2 - K_x}} \end{aligned} \tag{1-15}$$

(1-15)，(1-13) 式より

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{E(s)} &= \frac{X(s)}{I(s)}\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{-4}{7s^2 - K_x}\frac{1}{2s+3} \\ &= \underline{\frac{-4}{(7s^2 - K_x)(2s+3)}} \end{aligned} \tag{1-16}$$

となる。

[**問題 2**] (配点 10 点 (各 5 点))*学生の到達目標 (4)

次の伝達関数の <u>極</u> と <u>零点</u> をそれぞれ答えよ。ただし，存在しない場合は,「なし」と記載すること。

(1) $\dfrac{s}{s+3}$

(2) $\dfrac{1}{s^2+4s+3}$

[**解答**]

(1) <u>極: -3，零点: 0</u>

(2) $\dfrac{s}{s^2+4s+3} = \dfrac{s}{(s+1)(s+3)}$ より

<u>極: -1，-2，零点: なし</u>

[問題 3] (配点 30 点)*学生の到達目標 (3)

図 3-1 に示すブロック線図を簡単化したい。1 つの簡単化ごとに図を描いて途中の過程が分かるようにして答えよ。

【注意】(計算だけは採点対象にならない。)

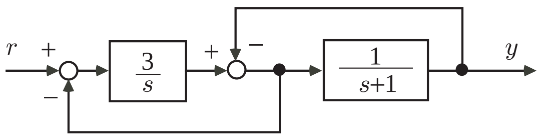
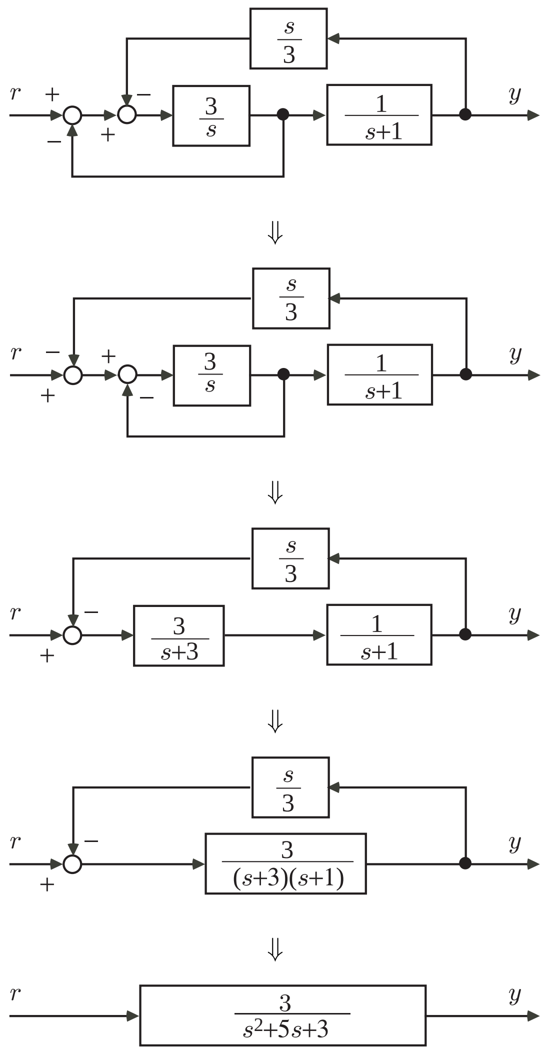


図 3-1: ブロック線図

[解答]



補足計算

$$\frac{\frac{3}{s}}{1+\frac{3}{s}} = \frac{3}{s+3} \tag{3-1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{3}{(s+3)(s+1)}}{1+\frac{s}{3}\frac{3}{(s+3)(s+1)}} &= \frac{\frac{3}{(s+3)(s+1)}}{1+\frac{s}{(s+3)(s+1)}} \\
&= \frac{3}{(s+3)(s+1)+s} \\
&= \frac{3}{s^2+5s+3}
\end{aligned} \tag{3-2}$$

[問題 4] (配点 30 点 (各 15 点))*学生の到達目標 (1)

図 4-1 に示すフィードフォワード制御系，図 4-2 に示すフィードバック制御系において，特性変動により制御対象が 4 から 3 に変化した。目標値 $r = 8$ m/s，外乱 $w = 0$ m/s としたとき，以下の問いに答えよ。

(1) 図 4-1 に示すフィードフォワード制御系において，$K_{FF} = \frac{1}{4}$ のとき出力 y を答えよ。

(2) 図 4-2 に示すフィードバック制御系において，$K_{FB} = 100$ のとき出力 y を答えよ。

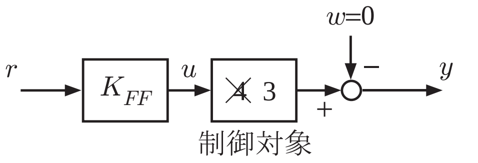


図 4-1: フィードフォワード制御系

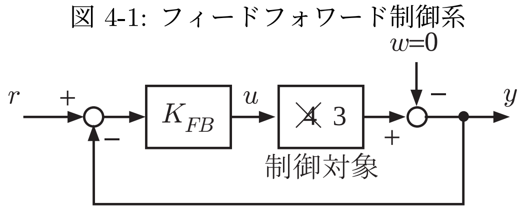


図 4-2: フィードバック制御系

[解答]

(1) $w = 0$ のとき，フィードフォワード制御系

$$y = 3K_{FF}r = 3 \times \frac{1}{4} \times 8 = \underline{6} \tag{4-1}$$

(2) $w = 0$ のとき，フィードバック制御系

$$\begin{aligned}
y &= 3K_{FB}(r-y) \\
(1+3K_{FB})y &= 3K_{FB}r \\
y &= \frac{3K_{FB}r}{1+3K_{FB}} \\
&= \frac{3 \times 100 \times 8}{1+3 \times 100} = \underline{\frac{2400}{301}}
\end{aligned} \tag{4-2}$$

[**問題 5**] (配点 5 点)*学生の到達目標 (2)

図 5-1 の RLC 回路の関係式から，入力 $e_i(t)$ から出力 $e_o(t)$ までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，R, L，C は記号のまま用いること。

$$e_i(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e_o(t) \tag{5-1}$$

$$i(t) = C\frac{de_o(t)}{dt} \tag{5-2}$$

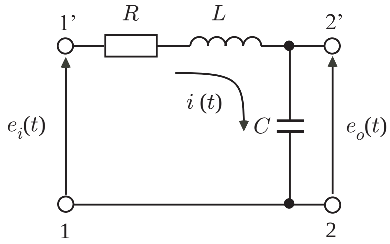


図 5-1: RLC 回路

[**解答**]

(5-2) 式を (5-1) 式へ代入する。

$$e_i(t) = RC\frac{de_o}{dt} + LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2} + e_o(t) \tag{5-3}$$

まとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} LCs^2E_o(s) + RCsE_o(s) + E_o(s) &= E_i(s) \\ \left(LCs^2 + RCs + 1\right)E_o(s) &= E_i(s) \end{aligned} \tag{5-4}$$

よって，伝達関数は次のようになる。

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \underline{\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}} \tag{5-5}$$