2019年度 制御工学 I 第4回資料

第 2 章 : ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

キーワード : 伝達関数

学習目標 : 伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する。

1

2 ダイナミカルシステムの表現
2.2 伝達関数

伝達関数 $=$ $\dfrac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$ （すべての初期値 $=0$ ）

$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ の定義より $Y(s)=G(s)U(s)$

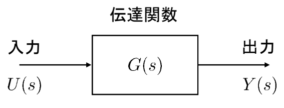

図 2.7 伝達関数

2

一般的には

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^mu(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0u(t)$$

「微分する」⟶「 s をかける」

$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)],\ U(s)=\mathcal{L}[u(t)]$

ラプラス変換

$$a_ns^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+\cdots+a_1sY(s)+a_0Y(s)$$
$$=b_ms^mU(s)+b_{m-1}s^{m-1}U(s)+\cdots+b_1sU(s)+b_0U(s)$$

$$\left(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0\right)Y(s)$$
$$=\left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0\right)U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

3

ダイナミクス $\left\{\begin{array}{l}\text{微分}\\ \text{積分}\end{array}\right.$ ➡ s の $\left\{\begin{array}{l}\text{乗算}\\ \text{除算}\end{array}\right.$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

加減乗除の代数的演算のみでよい

システムの結合（分離）の表現にメリット

4

[例 2.8] 水位系

$$A\frac{d}{dt}\delta h(t)+\frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t)=\delta q_i(t)$$

$\delta q_i(t)$: 入力
$\delta h(t)$: 出力

ラプラス変換

$Q_i(s)=\mathcal{L}[\delta q_i(t)]$
$H(s)=\mathcal{L}[\delta h(t)]$
（すべての初期値 $=0$）

$$AsH(s)+\frac{k}{2\sqrt{h_0}}H(s)=Q_i(s)$$
$$\left(As+\frac{k}{2\sqrt{h_0}}\right)H(s)=Q_i(s)$$

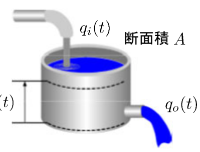

図 2.5 水位系

伝達関数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{H(s)}{Q_i(s)}=\frac{1}{As+\frac{k}{2\sqrt{h_0}}}$$

5

[例 2.11] RLC 回路

$$LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2}+RC\frac{de_o}{dt}+e_o(t)=e_i(t)$$

$e_i(t)$: 入力
$e_o(t)$: 出力

ラプラス変換

$E_i(s)=\mathcal{L}[e_i(t)]$
$E_o(s)=\mathcal{L}[e_o(t)]$
（すべての初期値 $=0$）

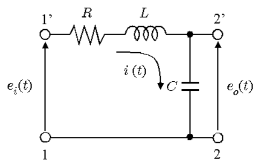

図 2.4 RLC回路

$$LCs^2E_o(s)+RCsE_o(s)+E_o(s)=E_i(s)$$
$$\left(LCs^2+RCs+1\right)E_o(s)=E_i(s)$$

伝達関数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

6

[例 2.12] 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2$
- $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$

$x(t) = x_0 + \delta x(t),\ i(t) = i_0 + \delta i(t)$

$e(t) = e_0 + \delta e(t)$

線形化 $\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2 = \left(\dfrac{i_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$

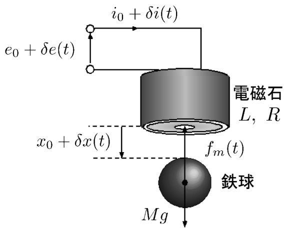

図 2.9 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$
- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

$K_x = \dfrac{2ki_0^2}{x_0^3},\ K_i = \dfrac{2ki_0}{x_0^2}$

$\delta e(t)$: 入力

$\delta x(t)$: 出力

7

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$

ラプラス変換 $X_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta x(t)]$, $I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$

（すべての初期値＝0）

$Ms^2X_\delta(s) = K_xX_\delta(s) - K_iI_\delta(s)$

$\Rightarrow\ X_\delta(s) = \dfrac{-K_i}{Ms^2 - K_x}I_\delta(s)$

- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

ラプラス変換 $I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$, $E_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta e(t)]$

（すべての初期値＝0）

$LsI_\delta(s) + RI_\delta(s) = E_\delta(s)$

$\Rightarrow\ I_\delta(s) = \dfrac{1}{Ls + R}E_\delta(s)$

伝達関数

$$G(s) = \frac{X_\delta(s)}{E_\delta(s)} = \frac{X_\delta(s)}{I_\delta(s)}\cdot\frac{I_\delta(s)}{E_\delta(s)} = \frac{-K_i}{Ms^2 - K_x}\cdot\frac{1}{Ls + R} = \frac{-K_i}{(Ms^2 - K_x)(Ls + R)}$$

8

[例 2.7] ばね系

$x(t) = \dfrac{1}{K}f(t)$ 　 $f(t)$: 入力 　 $x(t)$: 出力

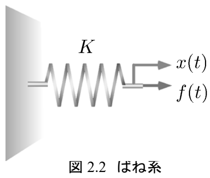

図 2.2 ばね系

ラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$

$X(s) = \dfrac{1}{K}F(s)$

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{K}$

伝達関数 ＝ $\dfrac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$

9

[例 2.9] RC 回路

- $i(t) = C\dfrac{de_o(t)}{dt}$
- $e_i(t) = Ri(t) + e_o(t)$

$e_i(t)$: 入力

$e_o(t)$: 出力

$RC\dfrac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$

ラプラス変換 $E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$, $E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$

（すべての初期値＝0）

$RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$

$(RCs + 1)\,E_o(s) = E_i(s)$

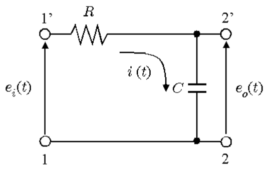

図 2.8 RC回路

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{E_o(s)}{E_i(s)} = \dfrac{1}{RCs + 1}$

10

[例 2.10] 質量ーばねーダンパ系

$M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + D\dfrac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$

$f(t)$: 入力

$x(t)$: 出力

ラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

（すべての初期値＝0）

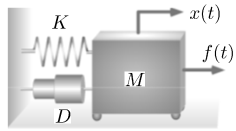

図 2.3 質量ーばねーダンパ系

$Ms^2X(s) + DsX(s) + KX(s) = F(s)$

$(Ms^2 + Ds + K)\,X(s) = F(s)$

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{Ms^2 + Ds + K}$

11

[例 2.13] むだ時間（時間遅れ）要素

$y(t) = u(t - L)$ 　 $L = l/v$

ラプラス変換 $e^{-as}F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)]$

$Y(s) = e^{-sL}U(s)$

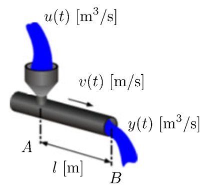

図 2.10 むだ時間要素の例

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sL}$

パデー近似

$e^{-sL} \approx \dfrac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2}$

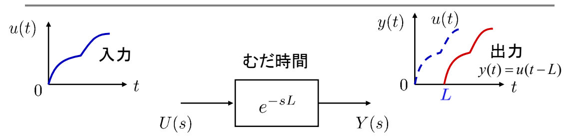

図 2.11 むだ時間要素

12

第２章：ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

キーワード： 伝達関数

学習目標：伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する。

13