第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

キーワード： 伝達関数

学習目標：伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する。

2 ダイナミカルシステムの表現
2.2 伝達関数

$$\text{伝達関数} = \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}} \quad （すべての初期値 = 0 ）$$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ の定義より $Y(s) = G(s)U(s)$

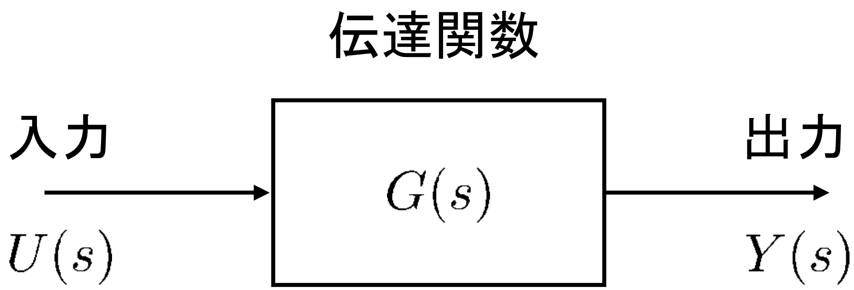

図 2.7 伝達関数

一般的には

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

「微分する」$\longrightarrow$「 s をかける」

$$Y(s) = \underline{\mathcal{L}}[y(t)], \; U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

ラプラス変換

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s)$$
$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s)$$
$$= \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\text{ダイナミクス}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{微分}\\[1ex]\text{積分}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\; s\,\text{の}\quad\begin{array}{l}\text{乗算}\\[1ex]\text{除算}\end{array}\right.$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

加減乗除の代数的演算のみでよい

システムの結合（分離）の表現にメリット

[例 2.8] 水位系

$$A\frac{d}{dt}\delta h(t) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t) = \delta q_i(t)$$

$\delta q_i(t)$: 入力

$\delta h(t)$: 出力

ラプラス変換

$$Q_i(s) = \mathcal{L}[\delta q_i(t)]$$

$$H(s) = \mathcal{L}[\delta h(t)]$$

（すべての初期値 $= 0$）

$$AsH(s) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}H(s) = Q_i(s)$$

$$\left(As + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\right)H(s) = Q_i(s)$$

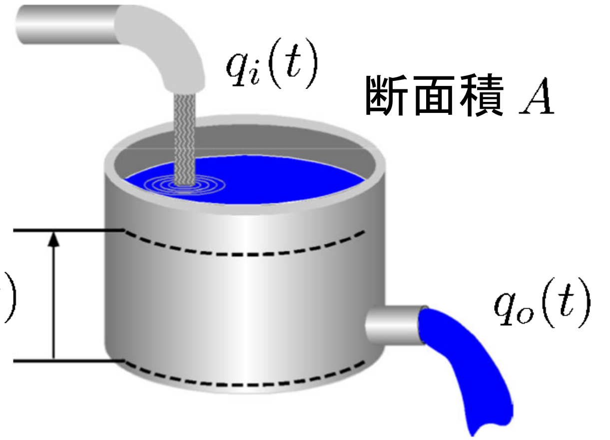

図 2.5 水位系

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{As + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}}$$

[例 2.11] RLC 回路

$e_i(t)$:入力

$e_o(t)$:出力

$$LC\frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + RC\frac{de_o}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

ラプラス変換

$$E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$$

$$E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$$

(すべての初期値$=0$)

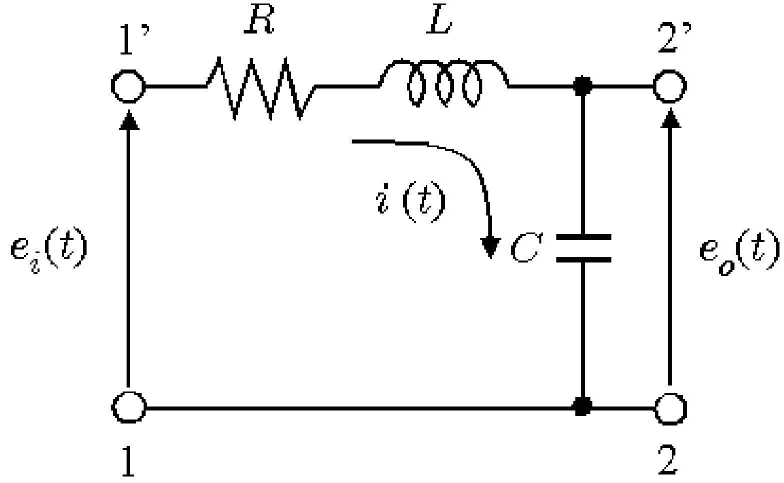

図 2.4 RLC回路

$$LCs^2E_o(s) + RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$$

$$\left(LCs^2 + RCs + 1\right)E_o(s) = E_i(s)$$

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

[例 2.12] 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2$
- $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$

$$x(t) = x_0 + \delta x(t),\ i(t) = i_0 + \delta i(t)$$

$$e(t) = e_0 + \delta e(t)$$

線形化 $\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2 = \left(\dfrac{i_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$
- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

$$K_x = \frac{2ki_0^2}{x_0^3},\ K_i = \frac{2ki_0}{x_0^2}$$

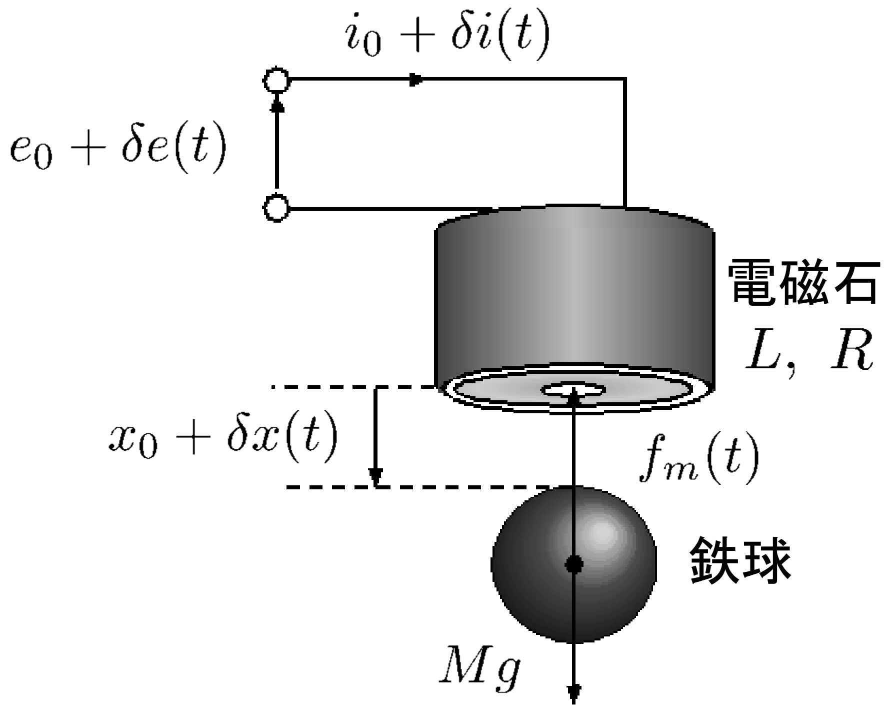

図 2.9 磁気浮上系

$\delta e(t)$:入力

$\delta x(t)$:出力

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$

ラプラス変換

$$X_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta x(t)]$$
$$I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$$

（すべての初期値$=0$）

$$Ms^2X_\delta(s) = K_xX_\delta(s) - K_iI_\delta(s)$$
$$\Rightarrow\ X_\delta(s) = \frac{-K_i}{Ms^2-K_x}I_\delta(s)$$

- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

ラプラス変換

$$I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$$
$$E_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta e(t)]$$

（すべての初期値$=0$）

$$LsI_\delta(s) + RI_\delta(s) = E_\delta(s)$$
$$\Rightarrow\ I_\delta(s) = \frac{1}{Ls+R}E_\delta(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{X_\delta(s)}{E_\delta(s)} = \frac{X_\delta(s)}{I_\delta(s)}\cdot\frac{I_\delta(s)}{E_\delta(s)}$$
$$= \frac{-K_i}{Ms^2-K_x}\cdot\frac{1}{Ls+R}$$
$$= \frac{-K_i}{(Ms^2-K_x)(Ls+R)}$$

[例 2.7] ばね系

$$x(t) = \frac{1}{K} f(t)$$

$f(t)$: 入力

$x(t)$: 出力

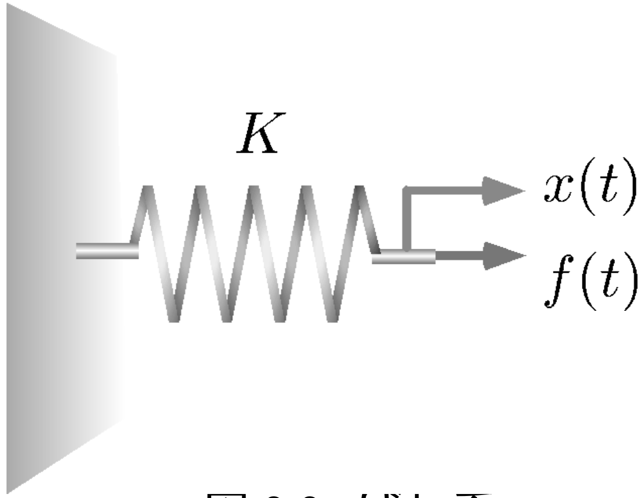

図 2.2　ばね系

ラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$X(s) = \frac{1}{K} F(s)$$

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{K}$$

$$\text{伝達関数} = \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$$

[例 2.9] RC 回路

- $i(t) = C\dfrac{de_o(t)}{dt}$
- $e_i(t) = Ri(t) + e_o(t)$

$e_i(t)$: 入力

$e_o(t)$: 出力

$$RC\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

ラプラス変換

$$E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$$

$$E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$$

(すべての初期値 $= 0$)

$$RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$$

$$(RCs + 1)\,E_o(s) = E_i(s)$$

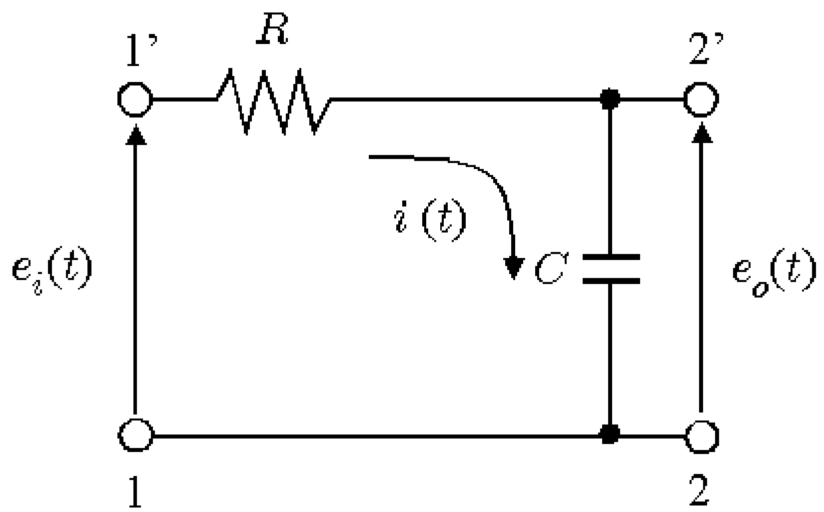

図 2.8　RC回路

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

[例 2.10] 質量ーばねーダンパ系

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+D\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=f(t)$$

$f(t)$: 入力

$x(t)$: 出力

ラプラス変換

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$$

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$$

（すべての初期値 $=0$）

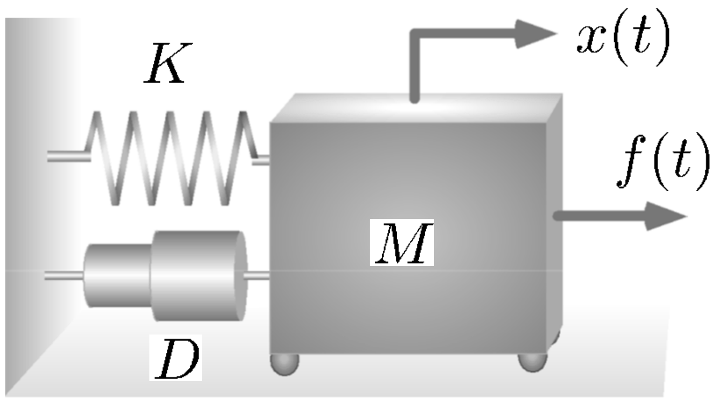

図 2.3　質量ーばねーダンパ系

$$Ms^2X(s)+DsX(s)+KX(s)=F(s)$$

$$\left(Ms^2+Ds+K\right)X(s)=F(s)$$

伝達関数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Ds+K}$$

[例 2.13] むだ時間（時間遅れ）要素

$$y(t) = u(t-L) \qquad L = l/v$$

ラプラス変換　$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)]$

$$Y(s) = e^{-sL}U(s)$$

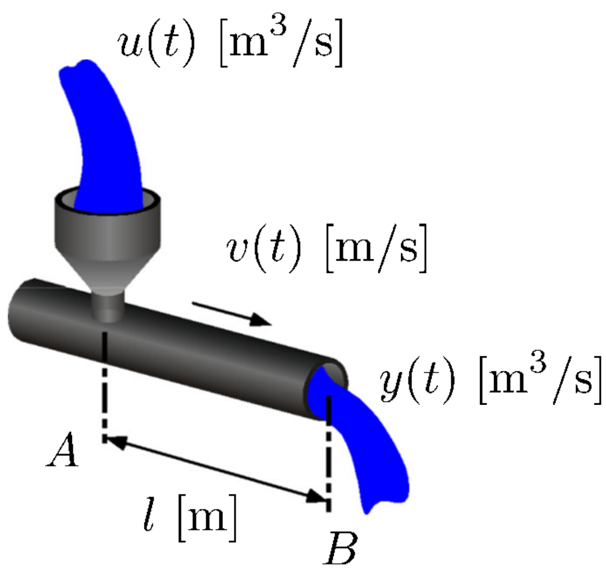

図 2.10　むだ時間要素の例

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sL}$$

パデー近似

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2}$$

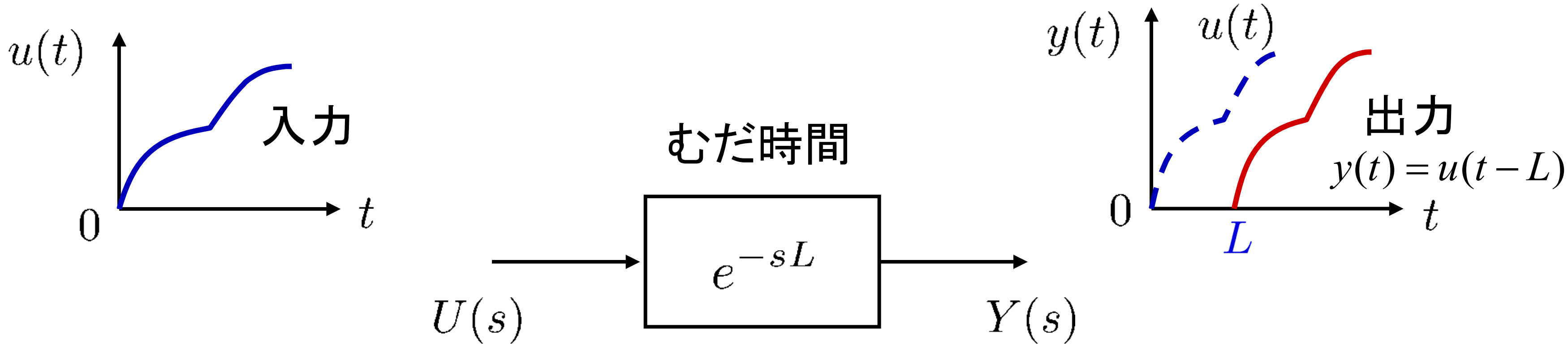

図 2.11　むだ時間要素

第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

キーワード： 伝達関数

学習目標：伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する。