第 3 章：ダイナミカルシステムの 過渡応答と安定性

3.2 1次系の応答

キーワード： 1次系の応答

学習目標：1 次系の過渡応答特性を理解する.

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.2 1次系の応答

1 次系　$G(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$

（分母の次数）=1

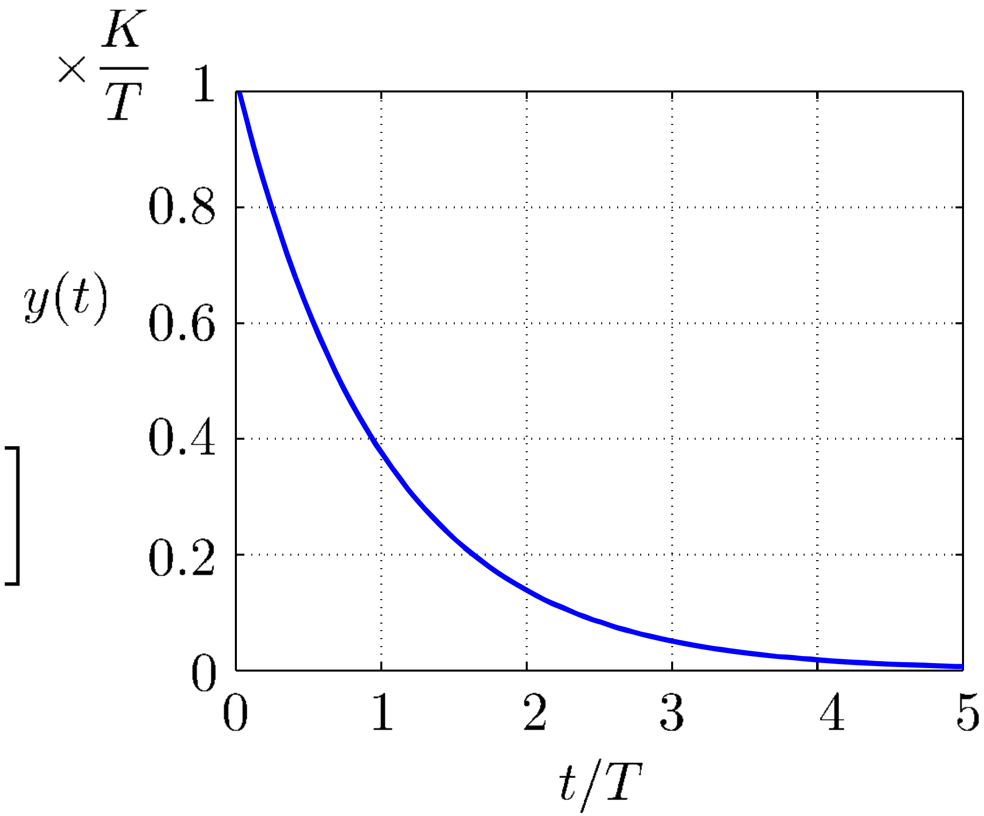


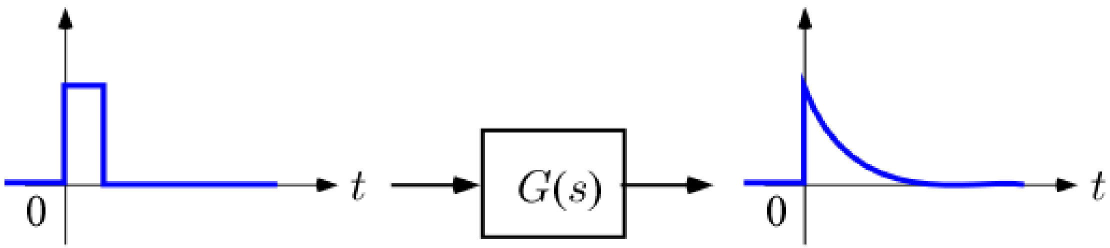
図 3.3 インパルス応答（1 次系）

インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K/T}{s+(1/T)}\right]$$

$$= \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$



ラプラス変換の基本公式

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s+a}\right] = be^{-at}$$

ステップ応答

インパルス応答の積分だから

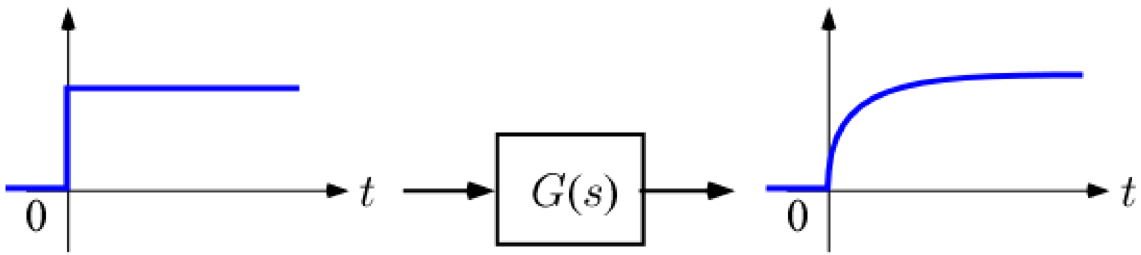
$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau \;\; = \frac{K}{T}\left[-Te^{-\frac{\tau}{T}}\right]_0^t = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

（別解）ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}K\left[\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}K\left[\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}K\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

$$= K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



定常値

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K$$

$$\left(\because \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0\right)$$

・時刻 $t = T$ において定常値の
63.2 % になる.

$$y(T) = K\left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = K\left(1 - e^{-1}\right)$$
$$= K\,(1 - 0.368) = 0.632 \cdot K$$

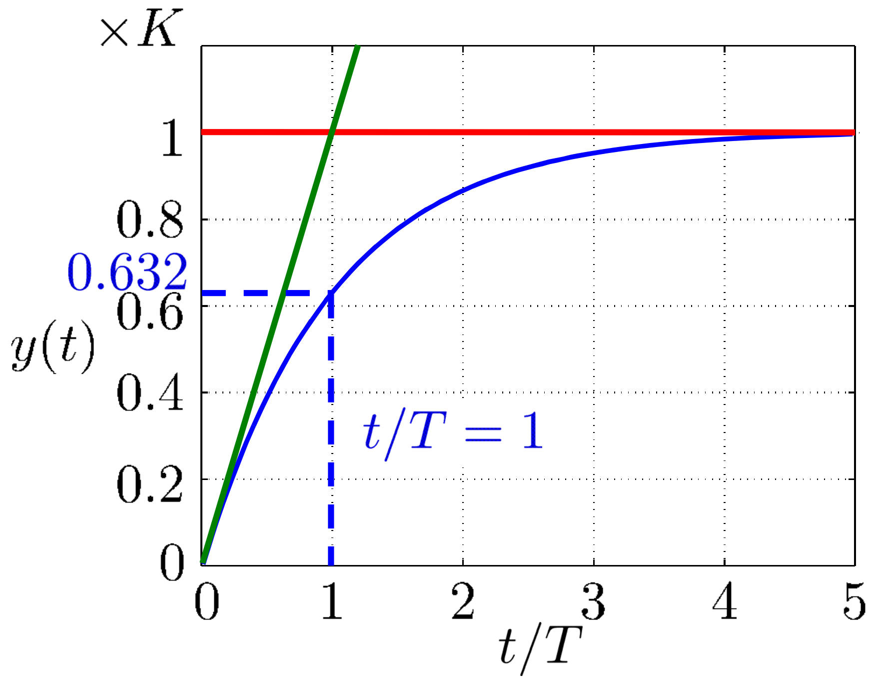


図 3.3 ステップ応答(1 次系)

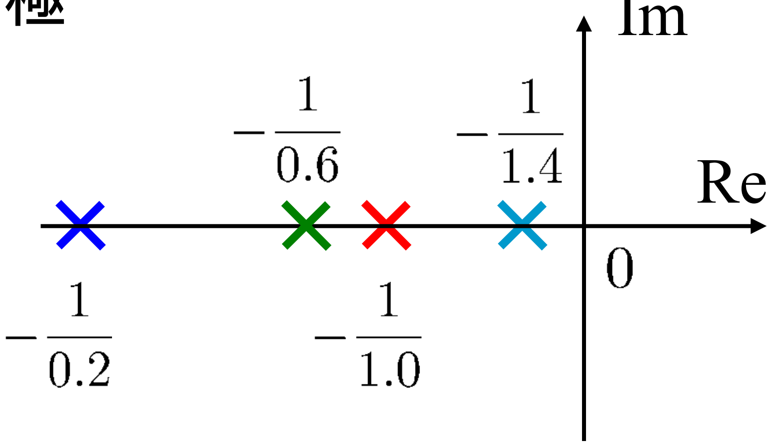
初期速度

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

・初期速度のまま進めば, T 秒後
に定常値に到達する.

T :時定数　　K :ゲイン

極



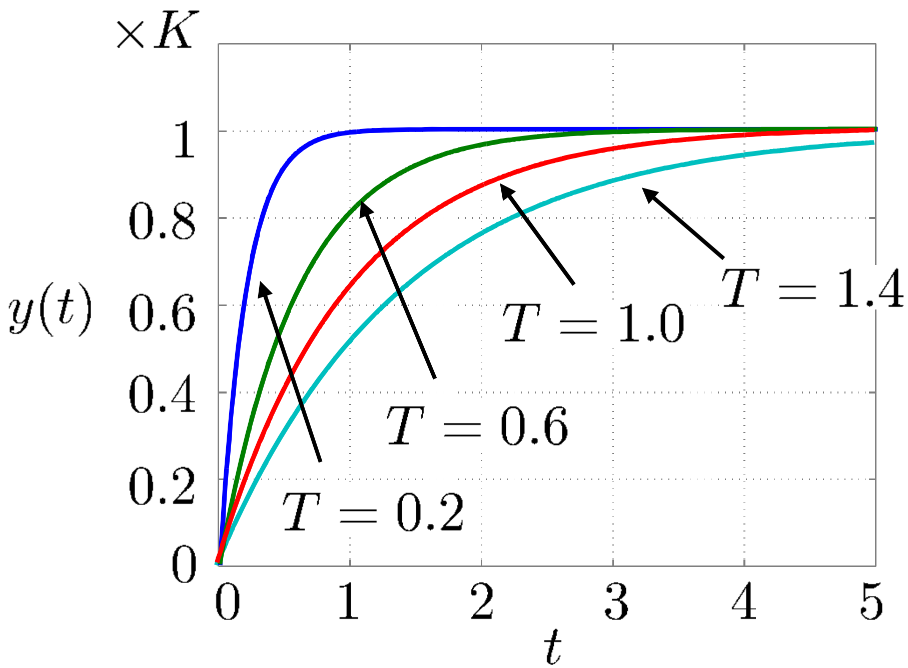


図 3.4 種々の時定数 T に対する応答

［例］

$$G_1(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{2s+1}$$

(1) どちらが速く立ち上がるか

時定数 $G_1(s) : 1, \quad G_2(s) : 2$

よって，$G_1(s)$ が速く立ち上がる

(2) 定常値はいくつか

ゲイン $G_1(s) : 2, \quad G_2(s) : 1$

よって，定常値は

$$G_1(s) : 2, \quad G_2(s) : 1$$

[例 2.9] RC 回路

$e_i(t)$: 入力

$e_o(t)$: 出力

$$RC\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

ラプラス変換

$$E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$$

$$E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$$

（すべての初期値 $= 0$）

$$RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$$

$$(RCs + 1)\,E_o(s) = E_i(s)$$

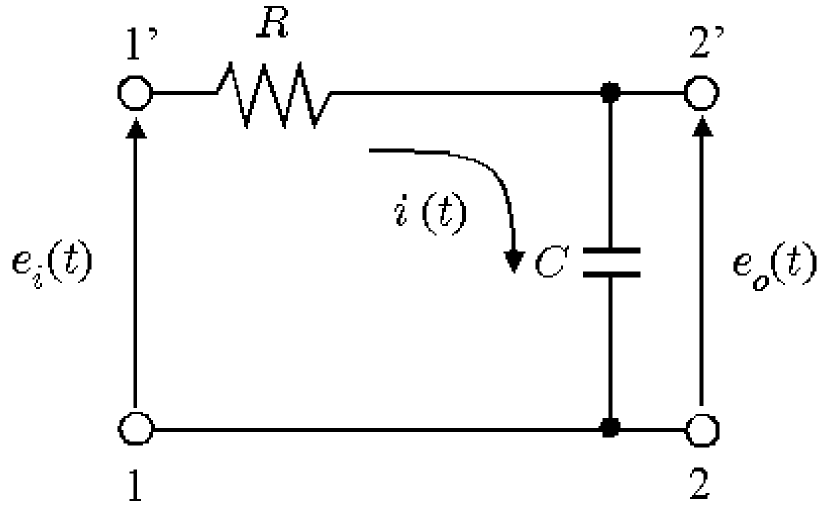


図 2.8　RC回路

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

時定数　$T = RC$

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.2 1次系の応答

キーワード： 1次系の応答

学習目標：1 次系の過渡応答特性を理解する.