

第3章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2次系の応答

キーワード： 2次系の応答

学習目標： 2次系の過渡応答特性について理解する。

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2次系の応答

2次系(2次遅れ系)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \zeta, \omega_n, K : \text{正定数}$$

($0 \leq \zeta < 1$ のとき)

極: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

極 (pole): $D(s) = 0$ の根

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\Rightarrow -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

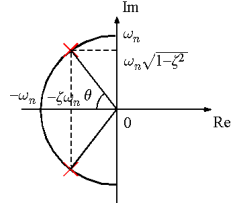
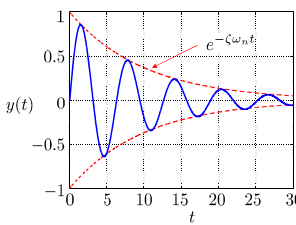
$$= \frac{-\zeta\omega_n}{\sigma} \pm j \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_d}$$


図 3.8 2次系の極の位置

複素共役根

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d$$

$$\omega_d := \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$


インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right]$$

図 3.6 2次系のインパルス応答例

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2} (s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2} \right]$$

$$= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

収束の速さ ω_d 振動の周波数

$$\left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \right] = e^{-at} \sin(\omega t) \right)$$

ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \right]$$

部分分数展開

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{K(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{K(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{K\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]$$

$$= K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right\}$$

$$= K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right\} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \right] = e^{-at} \cos(\omega t)$$

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

$\zeta = 1$ のとき 重根 $-\zeta\omega_n$

ステップ応答

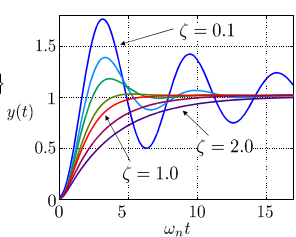
$$y(t) = K \{ 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \}$$


図 3.7 2次系のステップ応答

$\zeta > 1$ のとき 2実根

ステップ応答

$$y(t) = K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta} \left((\zeta + \beta) e^{\omega_n \beta t} - (\zeta - \beta) e^{-\omega_n \beta t} \right) \right\}$$

$$\beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\zeta < 1$ 不足制動 振動する

$\zeta = 1$ 臨界制動 振動しない

$\zeta > 1$ 過制動 振動しない

極に虚部が存在すると振動する

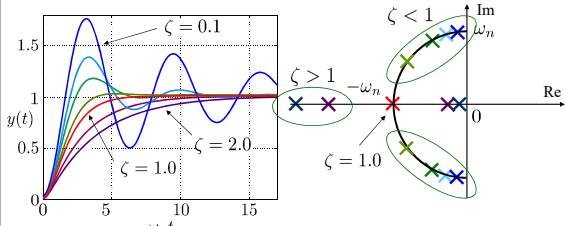
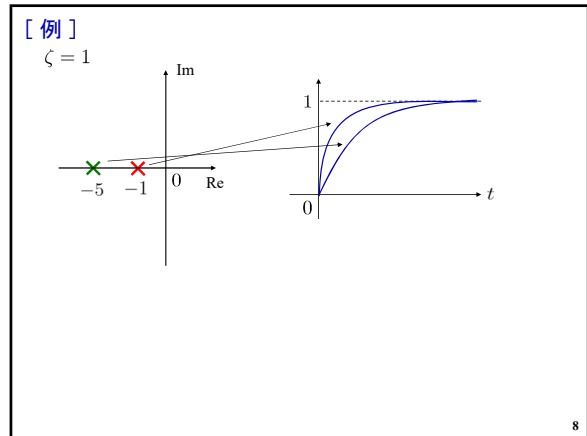
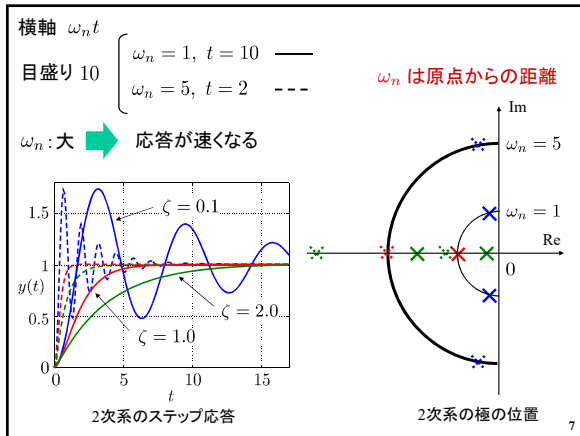


図 3.7 2次系のステップ応答

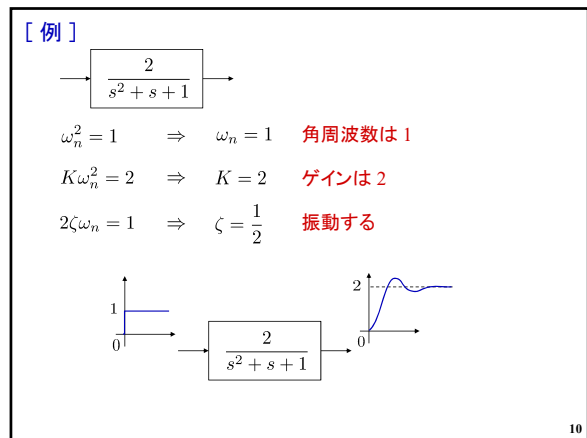
図 3.8 2次系の極の位置



2次系(2次遅れ系)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \zeta, \omega_n, K: \text{正定数}$$

- ζ は振動減衰(ダンピング)の特性を定める: 減衰係数 ζ
- ω_n は速応性を定める: 自然角周波数(固有角周波数) ω_n
- K はゲイン $G(0) = K$ 定常値, DC ゲイン



[例3.2] 質量-ばね-ダンパ系

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{(1/M)}{s^2 + (D_s/M)s + (K_s/M)}$$

- 自然角周波数 ω_n が K_s に比例
- 減衰係数 ζ が D_s に比例

第3章: ダイナミカルシステムの
 過渡応答と安定性

3.3 2次系の応答

キーワード: 2次系の応答

学習目標: 2次系の過渡応答特性について理解する。