第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極·零点と過渡応答

キーワード：　過渡応答，極，零点

学習目標：極·零点と過渡応答の関係について理解する。

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

極とインパルス応答

伝達関数 $G(s)$

実極 $\underbrace{-\sigma_i}_{\text{実部}}(i = 1 \sim M)$

【例】

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

極 $\sigma = -1$

複素共役極 $\underbrace{-\alpha_i}_{\text{実部}} \pm j\underbrace{\omega_i}_{\text{虚部}}(i = 1 \sim N)$

【例】

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

極 $\dfrac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$

$$\alpha = \frac{-1}{2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

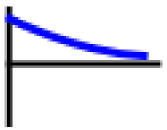
インパルス応答（ラプラス変換）

部分分数展開より

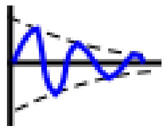
$$y(s) = G(s) = \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2 + \omega_i^2}$$

インパルス応答

$$y(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$



1次系



2次系

【例】

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

極の実部　極の虚部

極の実部の大きさ:　収束の速さ

極の虚部の大きさ:　振動成分の周期

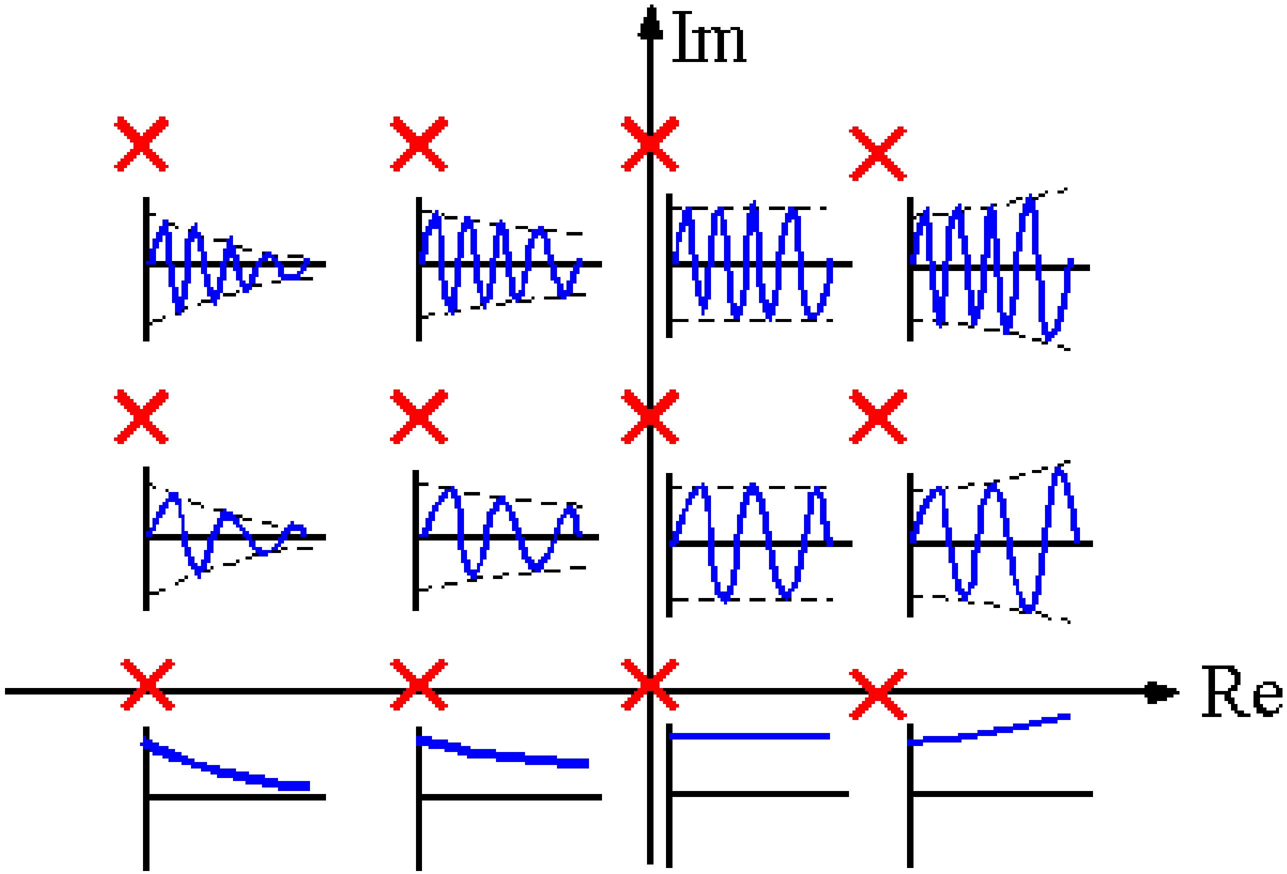


図 3.9　極の位置とインパルス応答

ステップ応答（ラプラス変換）

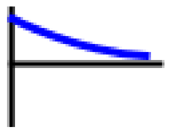
部分分数展開より

$$y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2 + \omega_i^2}$$

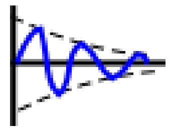
ステップ応答

$$y(t) = \underline{A_0} + \sum_{i=1}^{M} A_i \underline{e^{-\sigma_i t}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} \underline{e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t}$$

ステップ入力
に対応



1次系



2次系

過渡応答に関する特性値

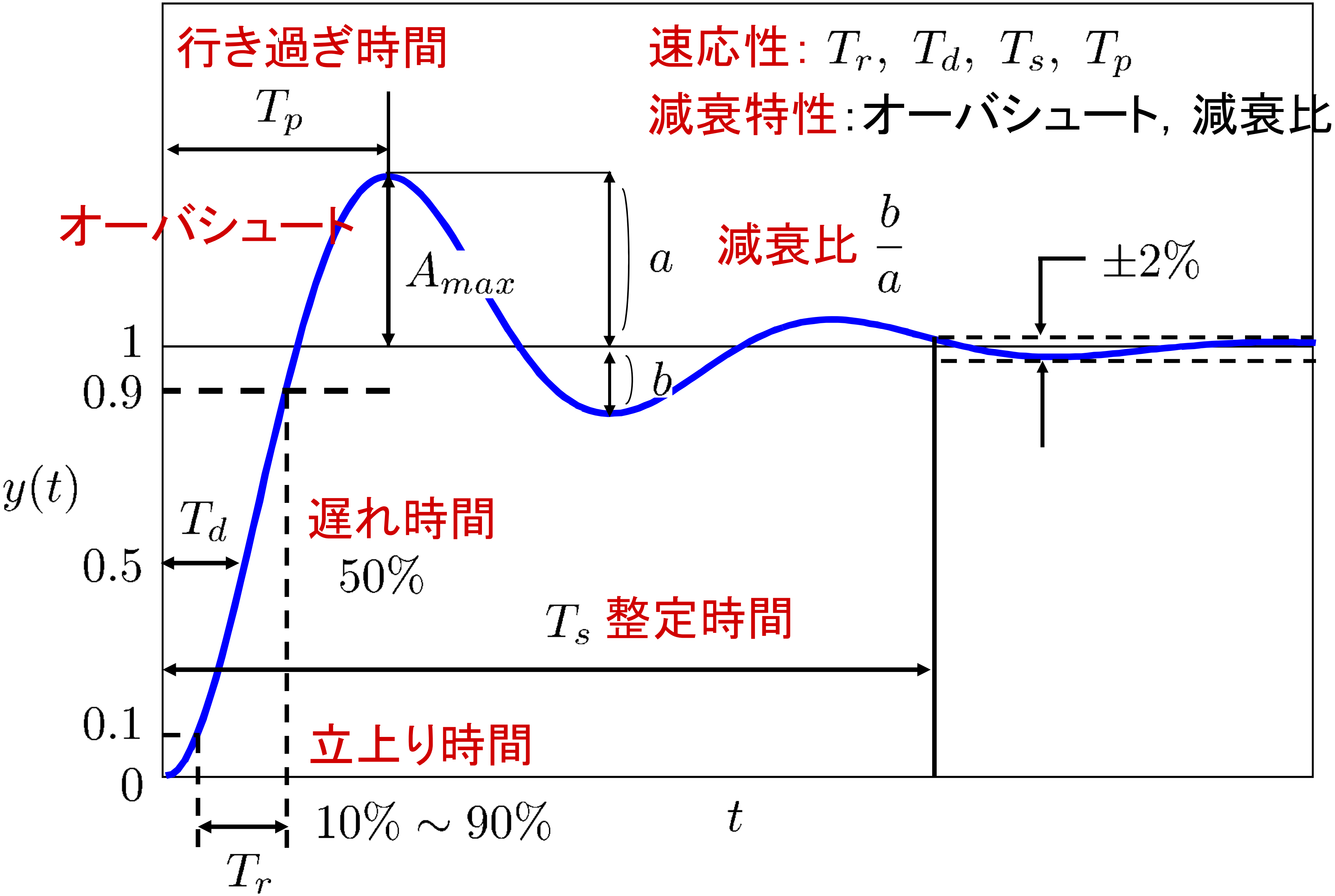
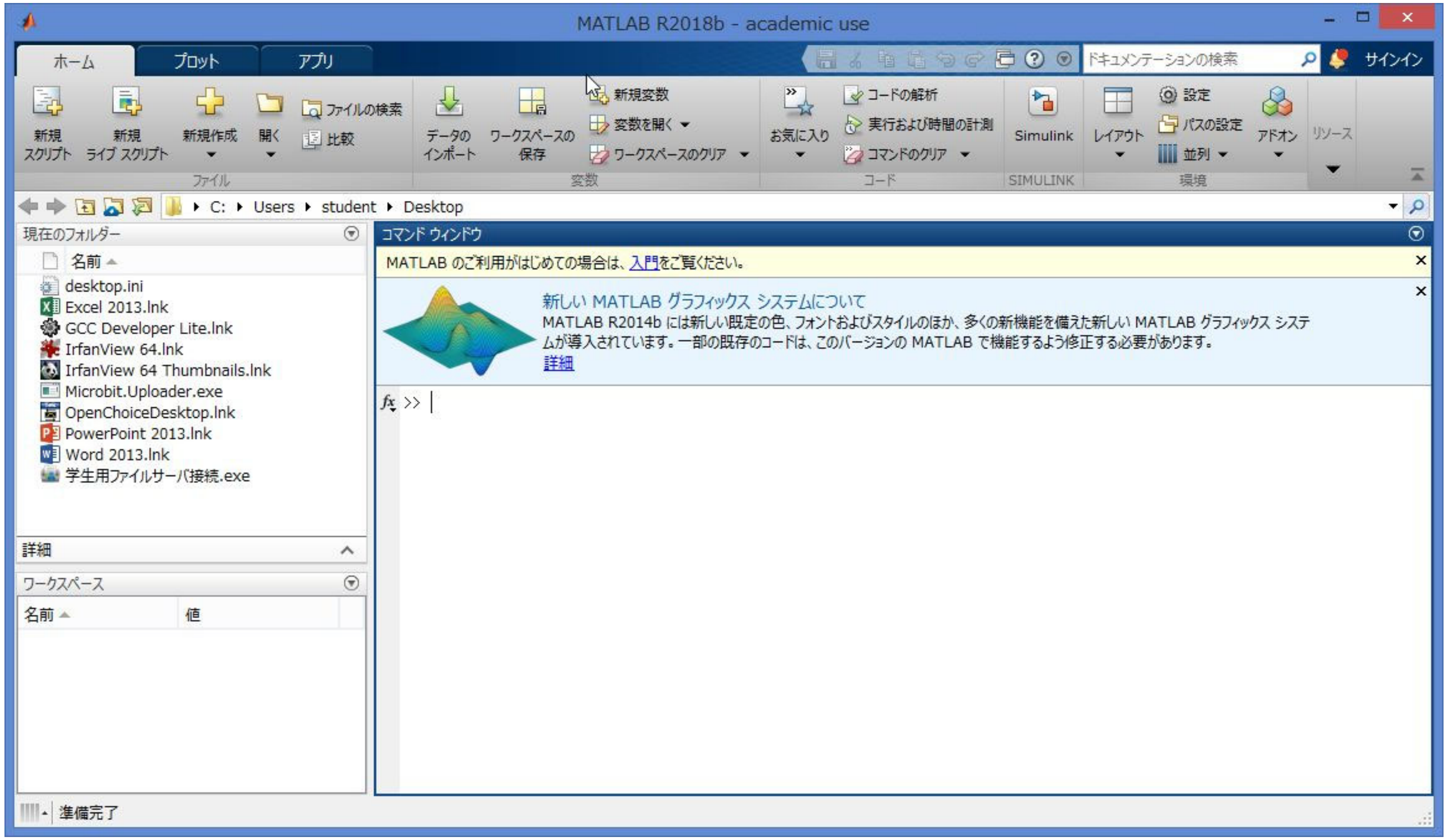


図 3.10　過渡応答と諸特性値

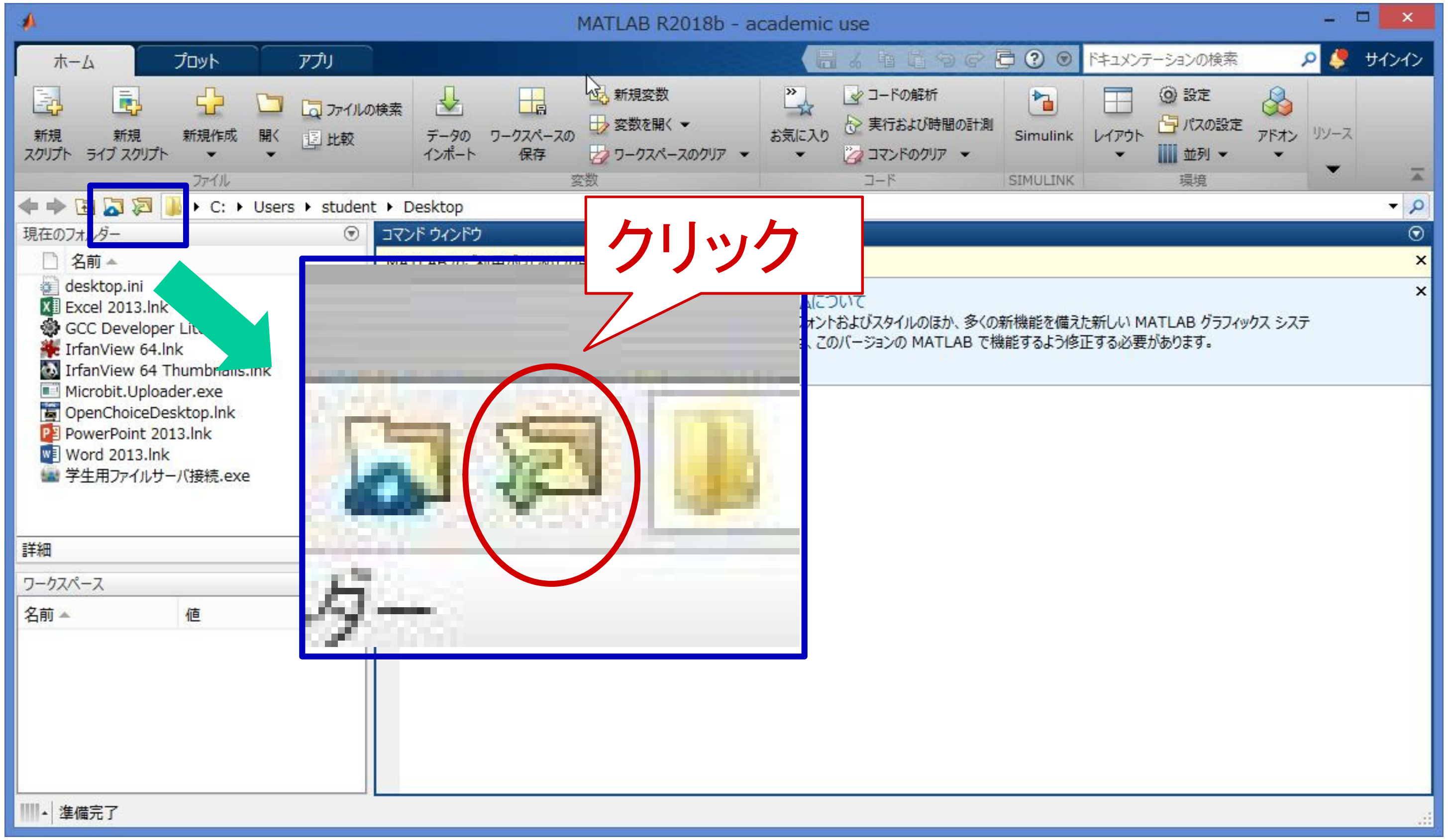
MATLAB演習

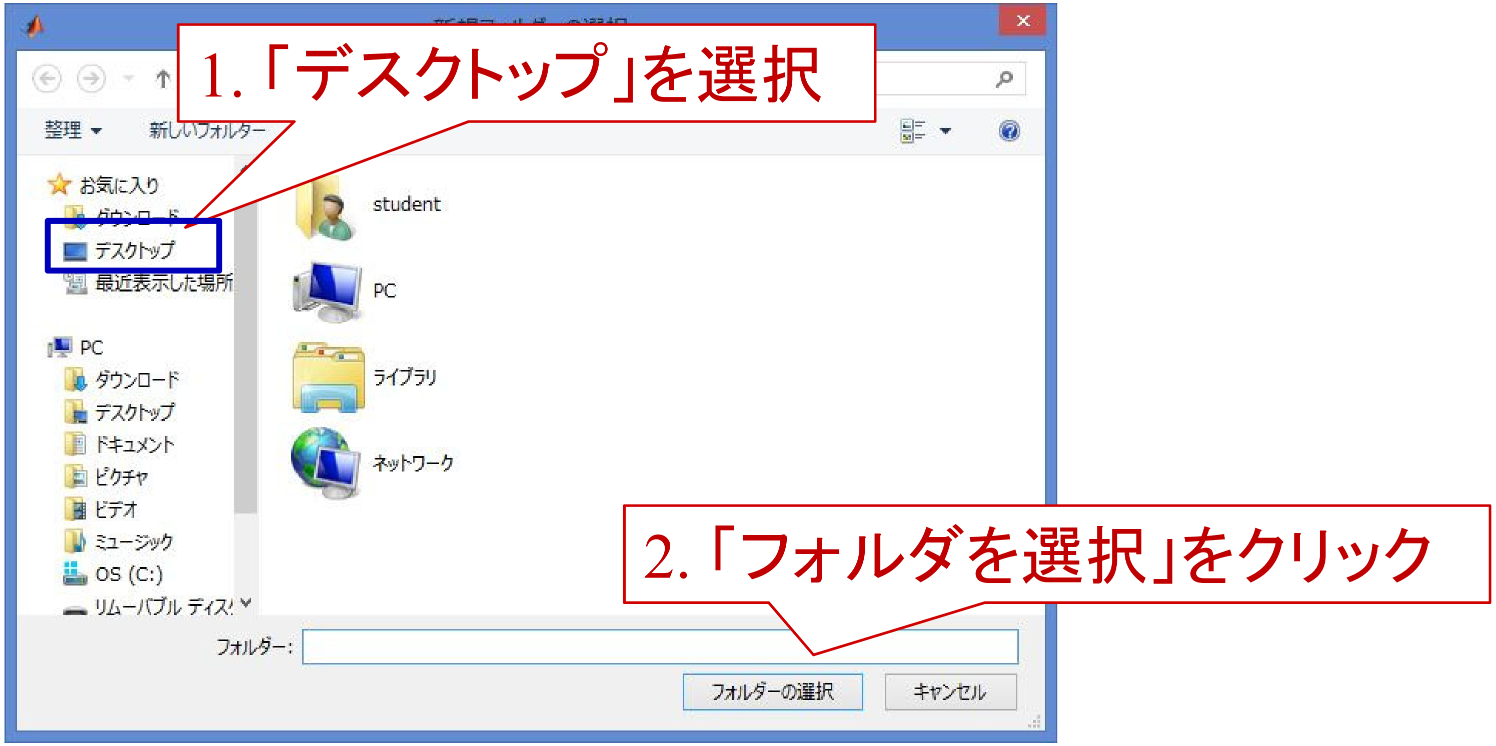
(1) MATLABの起動

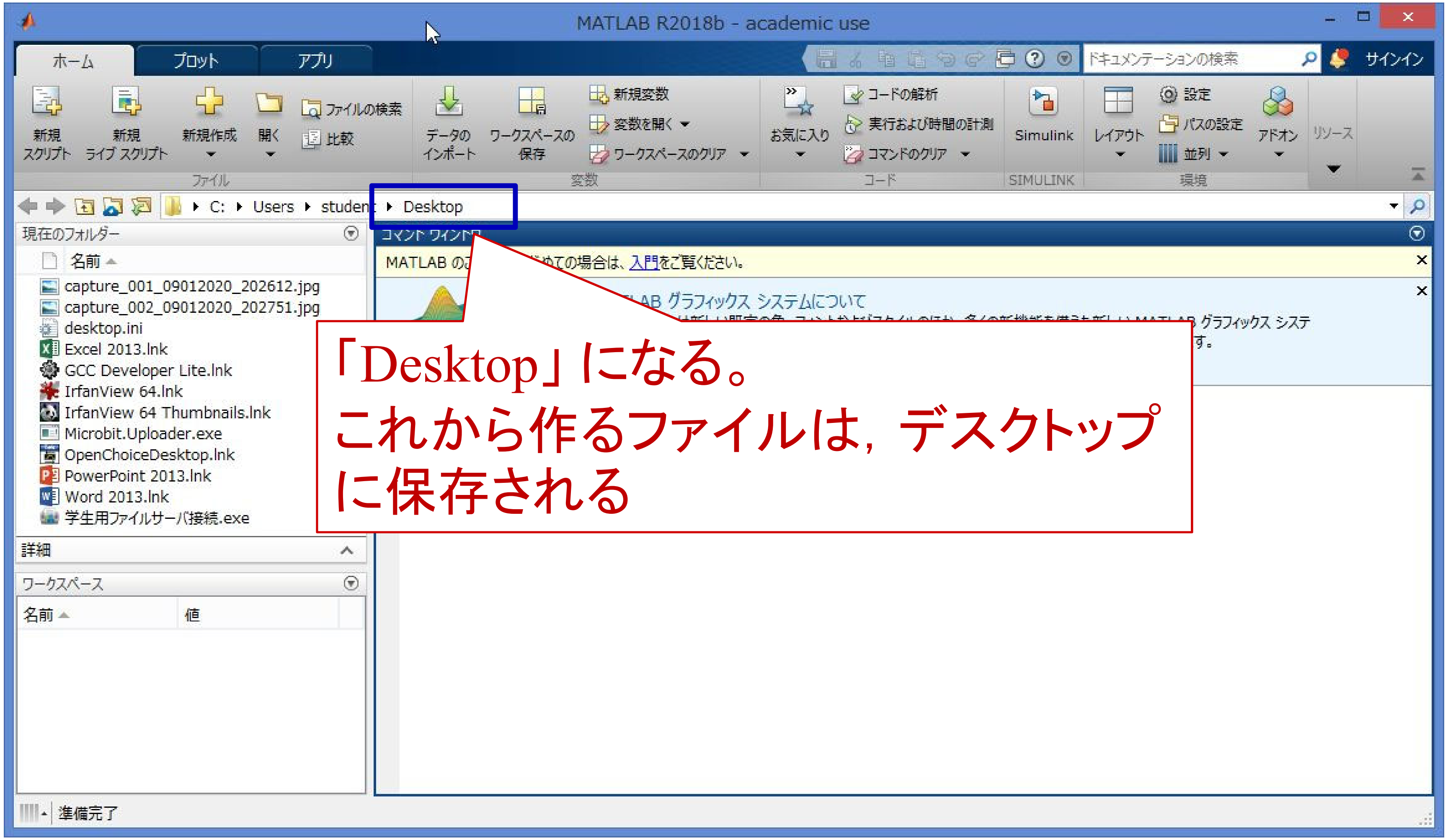
をクリック



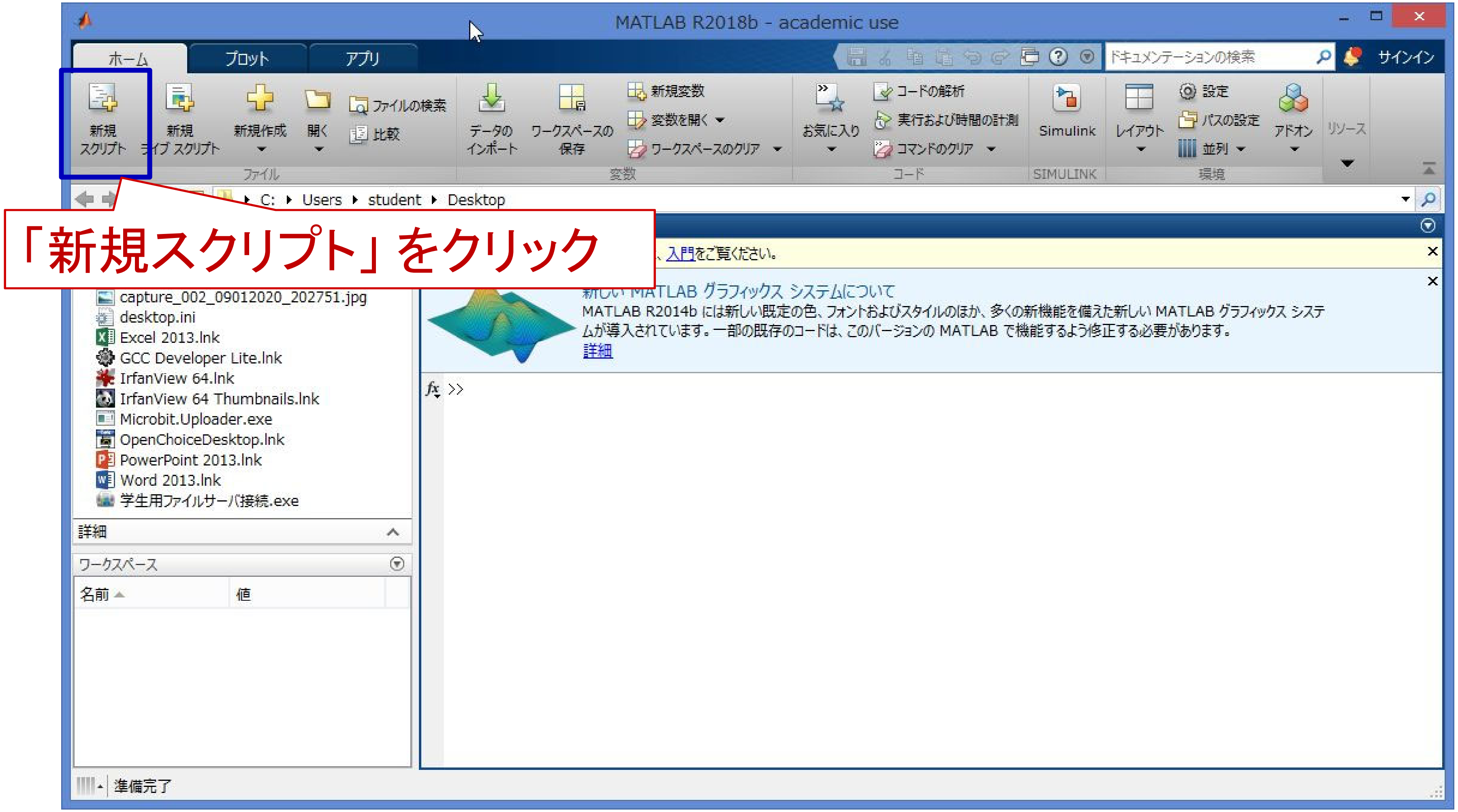
(2) カレントフォルダの設定



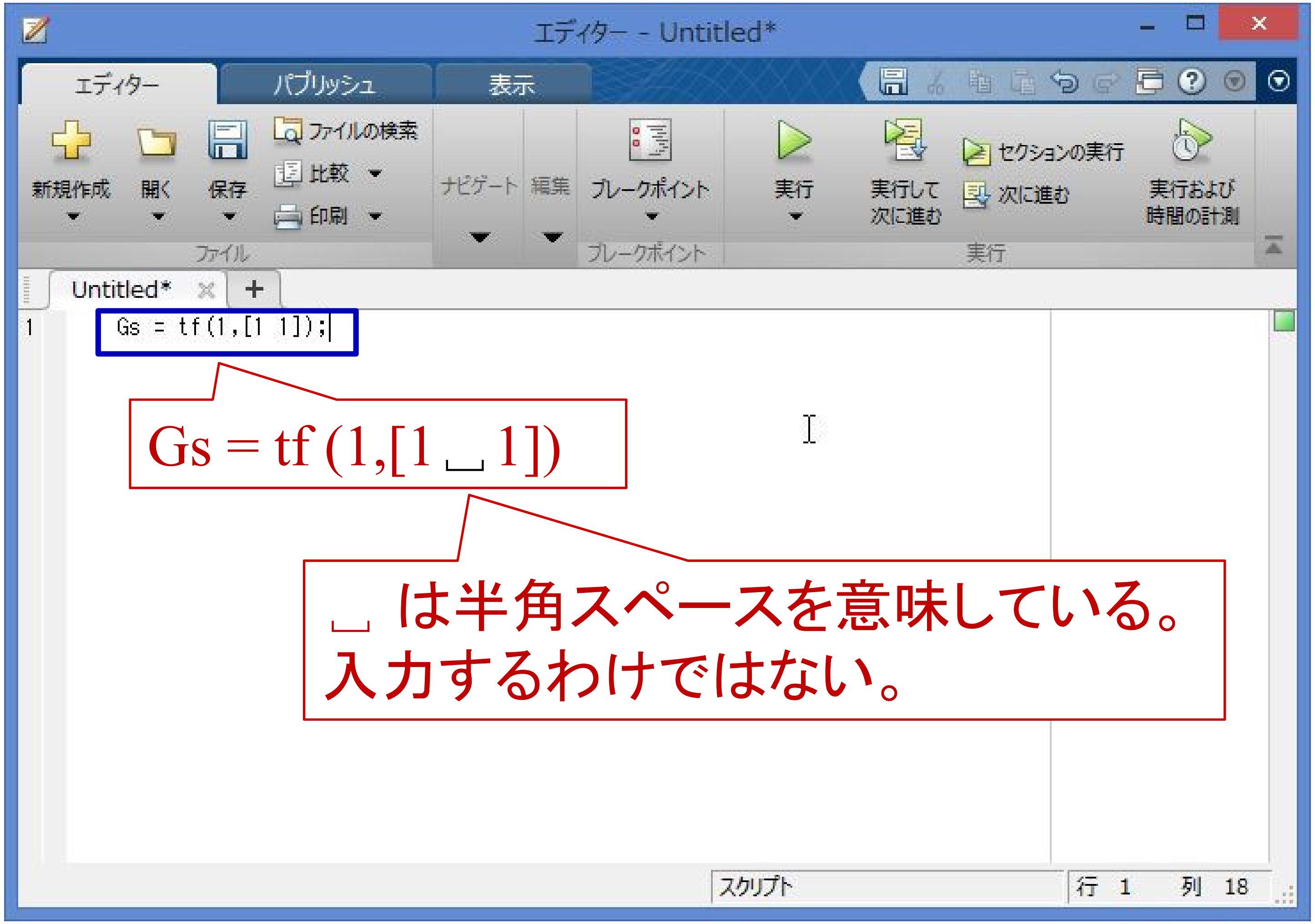

1.「デスクトップ」を選択
2.「フォルダを選択」をクリック
整理
新しいフォルダー
お気に入り
デスクトップ
最近表示した場所
PC
ダウンロード
デスクトップ
ドキュメント
ピクチャ
ビデオ
ミュージック
OS (C:)
student
PC
ライブラリ
ネットワーク
フォルダー:
フォルダーの選択
キャンセル

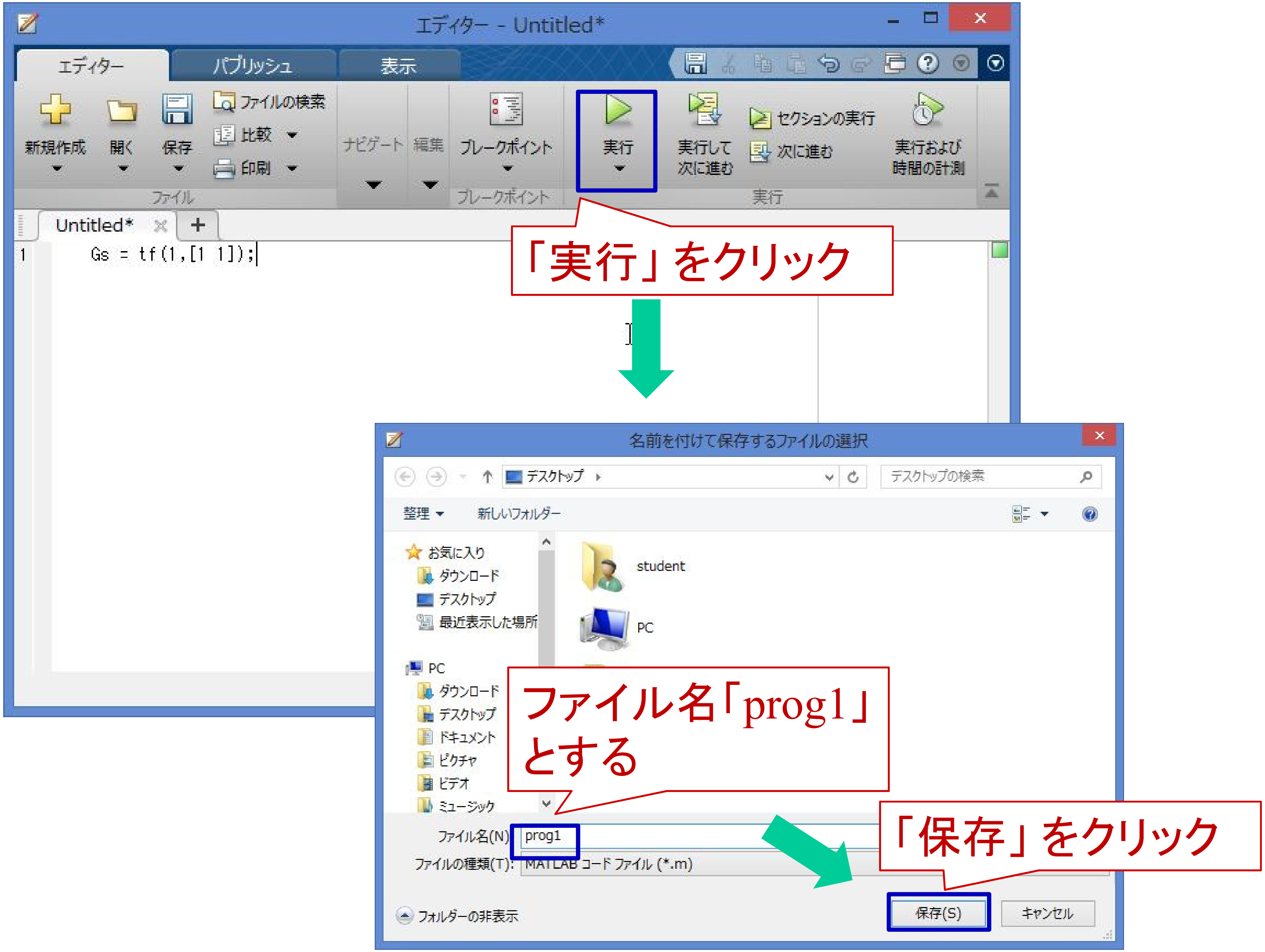

MATLAB R2018b - academic use
ホーム
プロット
アプリ
ドキュメンテーションの検索
サインイン
新規スクリプト
新規ライブ スクリプト
新規作成
開く
ファイルの検索
比較
ファイル
データのインポート
ワークスペースの保存
新規変数
変数を開く
ワークスペースのクリア
変数
お気に入り
コードの解析
実行および時間の計測
コマンドのクリア
コード
Simulink
SIMULINK
レイアウト
設定
パスの設定
並列
環境
アドオン
リソース
C: ▸ Users ▸ student ▸ Desktop
現在のフォルダー
名前
capture_001_09012020_202612.jpg
capture_002_09012020_202751.jpg
desktop.ini
Excel 2013.lnk
GCC Developer Lite.lnk
IrfanView 64.lnk
IrfanView 64 Thumbnails.lnk
Microbit.Uploader.exe
OpenChoiceDesktop.lnk
PowerPoint 2013.lnk
Word 2013.lnk
学生用ファイルサーバ接続.exe
詳細
ワークスペース
名前
値
準備完了
「Desktop」になる。
これから作るファイルは，デスクトップに保存される

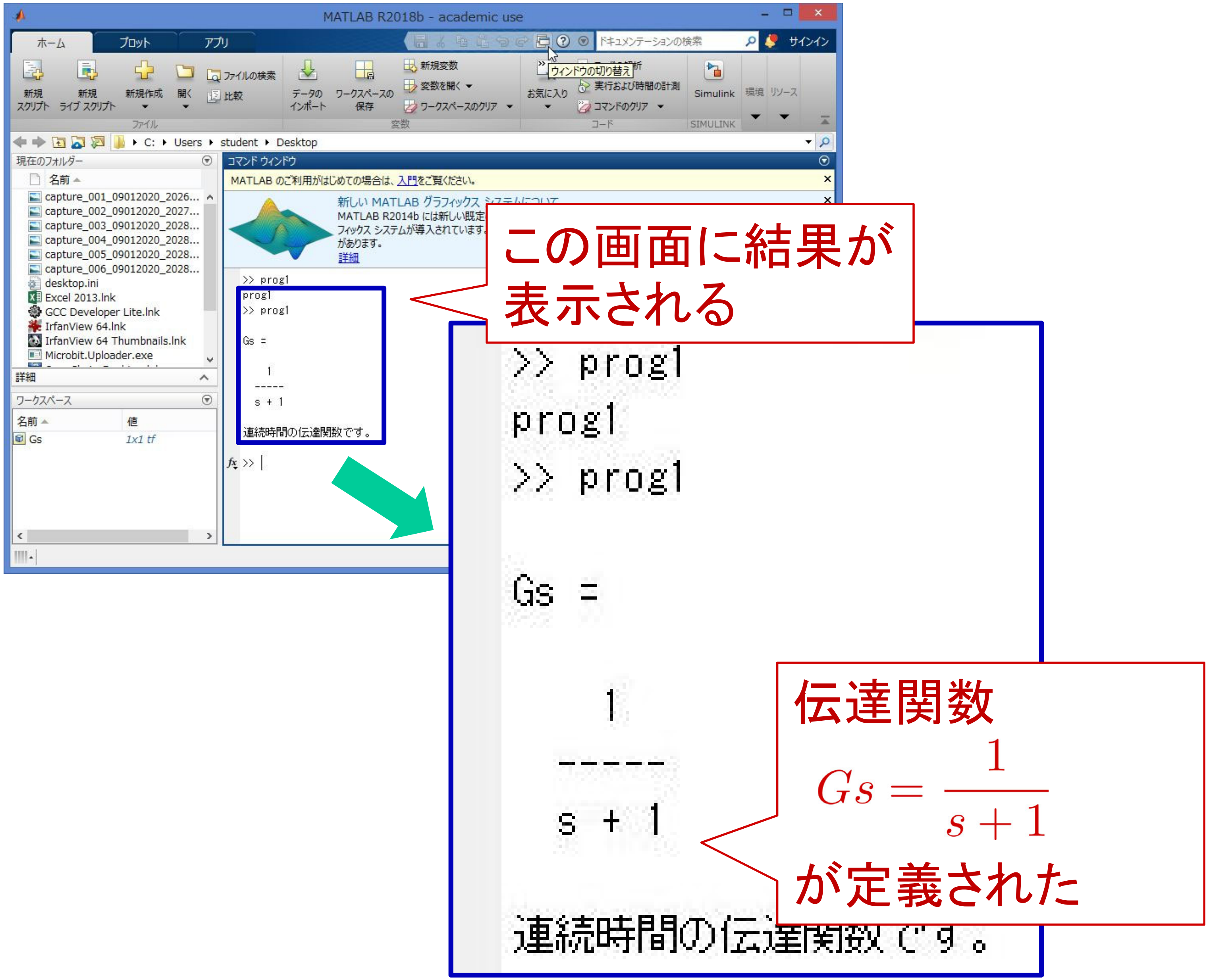
(3) m ファイルの作成



MATLAB R2018b - academic use
ホーム
プロット
アプリ
新規 スクリプト
新規 ライブ スクリプト
新規作成
開く
ファイルの検索
比較
データの インポート
ワークスペースの 保存
新規変数
変数を開く
ワークスペースのクリア
お気に入り
コードの解析
実行および時間の計測
コマンドのクリア
Simulink
レイアウト
設定
パスの設定
並列
アドオン
リソース
「新規スクリプト」をクリック
capture_002_09012020_202751.jpg
desktop.ini
Excel 2013.lnk
GCC Developer Lite.lnk
IrfanView 64.lnk
IrfanView 64 Thumbnails.lnk
Microbit.Uploader.exe
OpenChoiceDesktop.lnk
PowerPoint 2013.lnk
Word 2013.lnk
学生用ファイルサーバ接続.exe
詳細
ワークスペース
名前
値
新しい MATLAB グラフィックス システムについて
MATLAB R2014b には新しい既定の色、フォントおよびスタイルのほか、多くの新機能を備えた新しい MATLAB グラフィックス システムが導入されています。一部の既存のコードは、このバージョンの MATLAB で機能するよう修正する必要があります。
詳細
準備完了


エディター - Untitled*
エディター
パブリッシュ
表示
ファイルの検索
比較
印刷
新規作成
開く
保存
ファイル
ナビゲート
編集
ブレークポイント
実行
実行して
次に進む
セクションの実行
次に進む
実行および
時間の計測
Untitled*
Gs = tf(1,[1 1]);
Gs = tf (1,[1 ␣ 1])
␣ は半角スペースを意味している。
入力するわけではない。
スクリプト
行 1
列 18


エディター - Untitled*
エディター
パブリッシュ
表示
新規作成
開く
保存
ファイルの検索
比較
印刷
ファイル
ナビゲート
編集
ブレークポイント
ブレークポイント
実行
実行して
次に進む
セクションの実行
次に進む
実行および
時間の計測
実行
Untitled*
Gs = tf(1,[1 1]);
「実行」をクリック
名前を付けて保存するファイルの選択
デスクトップ
デスクトップの検索
整理
新しいフォルダー
お気に入り
ダウンロード
デスクトップ
最近表示した場所
PC
ダウンロード
デスクトップ
ドキュメント
ピクチャ
ビデオ
ミュージック
student
PC
ファイル名「prog1」
とする
ファイル名(N):
prog1
ファイルの種類(T):
MATLAB コード ファイル (*.m)
フォルダーの非表示
「保存」をクリック
保存(S)
キャンセル



MATLAB R2018b - academic use
この画面に結果が表示される
>> prog1
prog1
>> prog1
Gs =
1
-----
s + 1
連続時間の伝達関数です。
伝達関数
$Gs = \frac{1}{s+1}$
が定義された

伝達関数の定義

tf (分子の係数, 分母の係数)

Gs = tf (1,[1␣1])

【例】 $G(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad$ $G(s) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{1s}\boxed{+1}}$

Gs = tf (1,[1␣1])

【例】 $G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$

Gs = tf ([1␣1], [1␣0␣1])

【問題1】 次の伝達関数を定義するプロフラムを示せ

(1) $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$

(2) $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$

伝達関数の演算

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$ を定義するには

$$= \frac{1}{(s+1)} \times \frac{1}{0.1s+1}$$

Gs = tf ([1], [1 ␣ 1])* tf ([1], [0.1 ␣ 1])

乗算は「*」

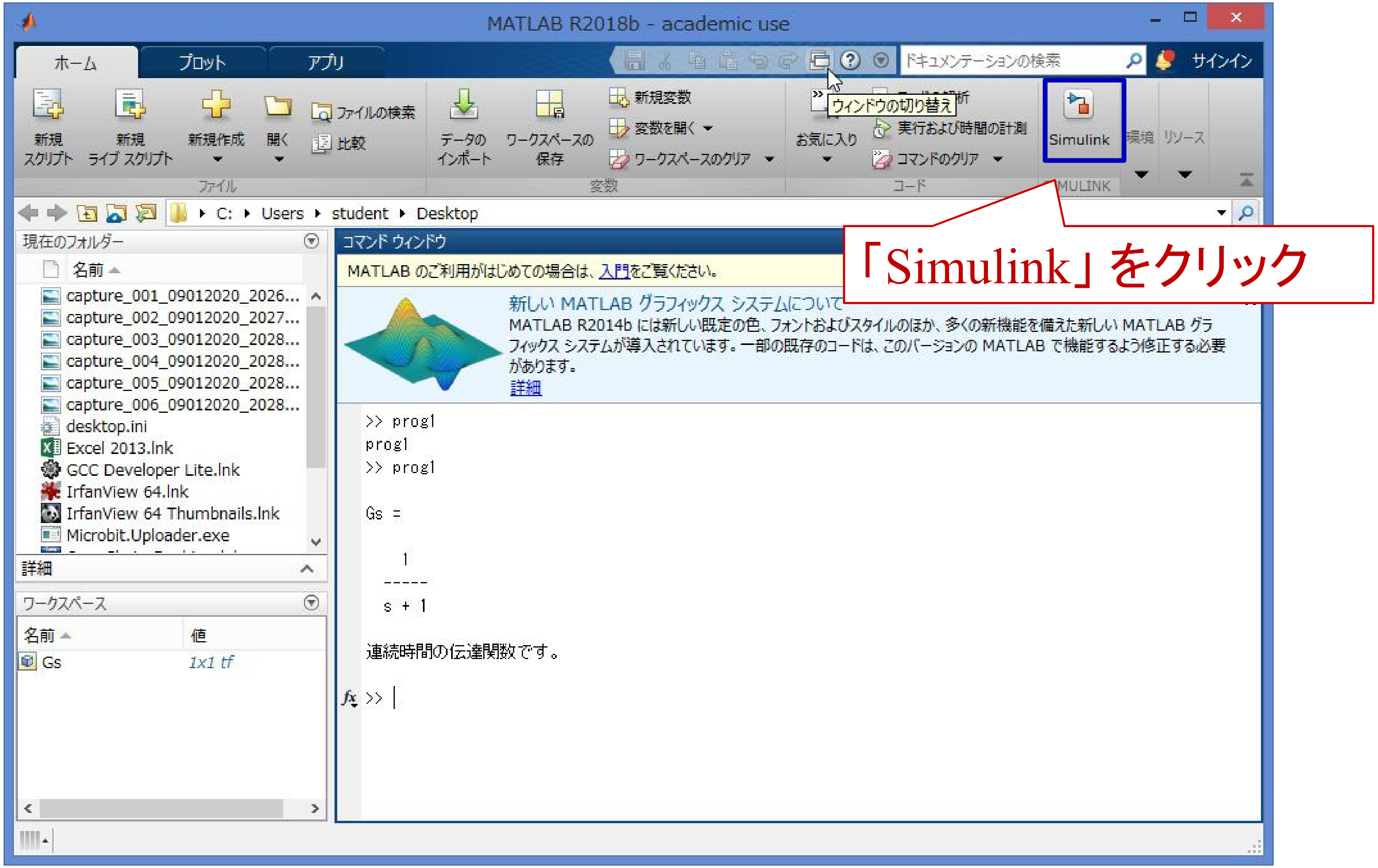
【問題2】 次の伝達関数を定義するプロフラムを示せ

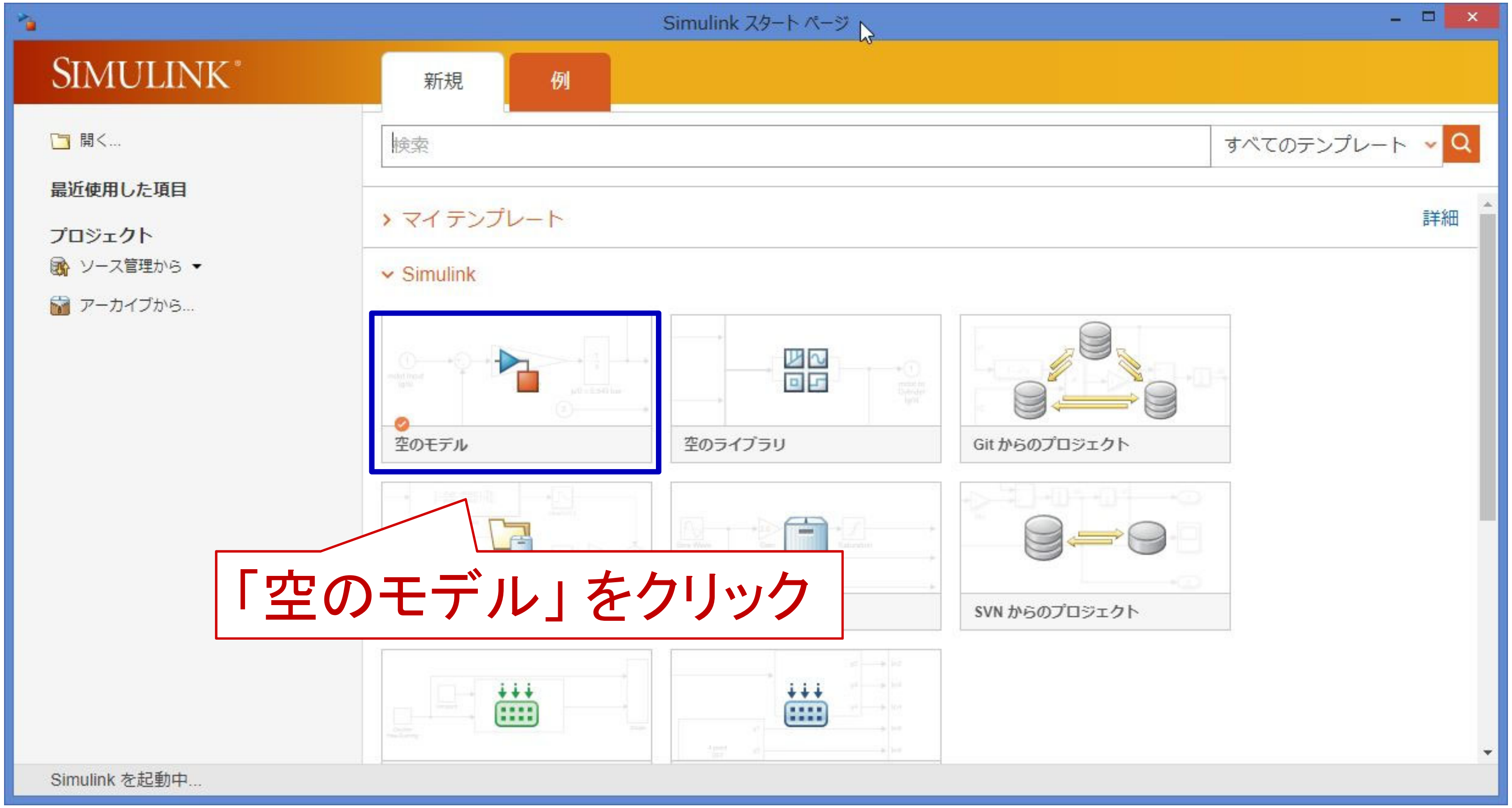
(1) $$G(s) = \frac{1}{(2s+1)^2}$$

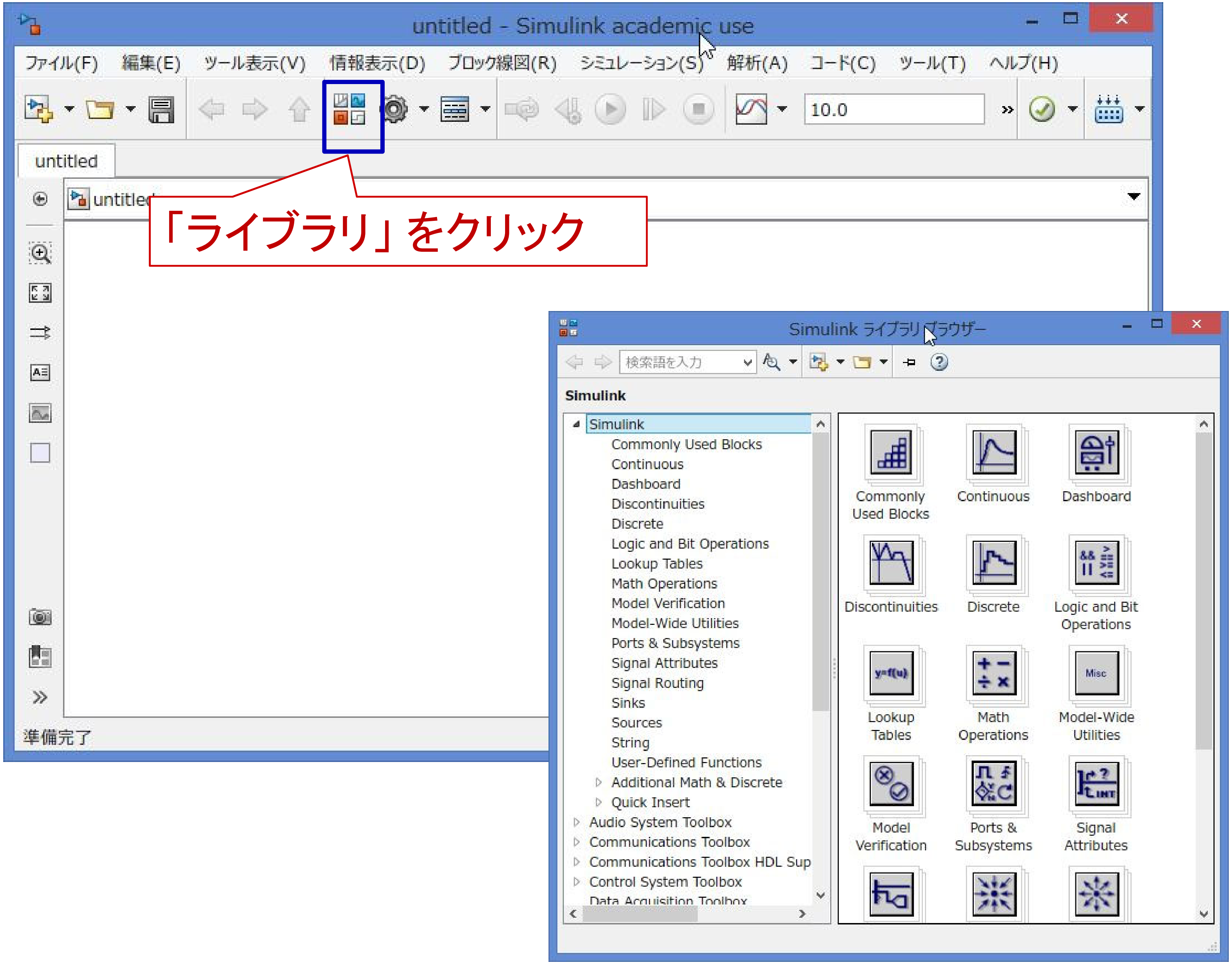
(2) $$G(s) = \frac{2s+10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

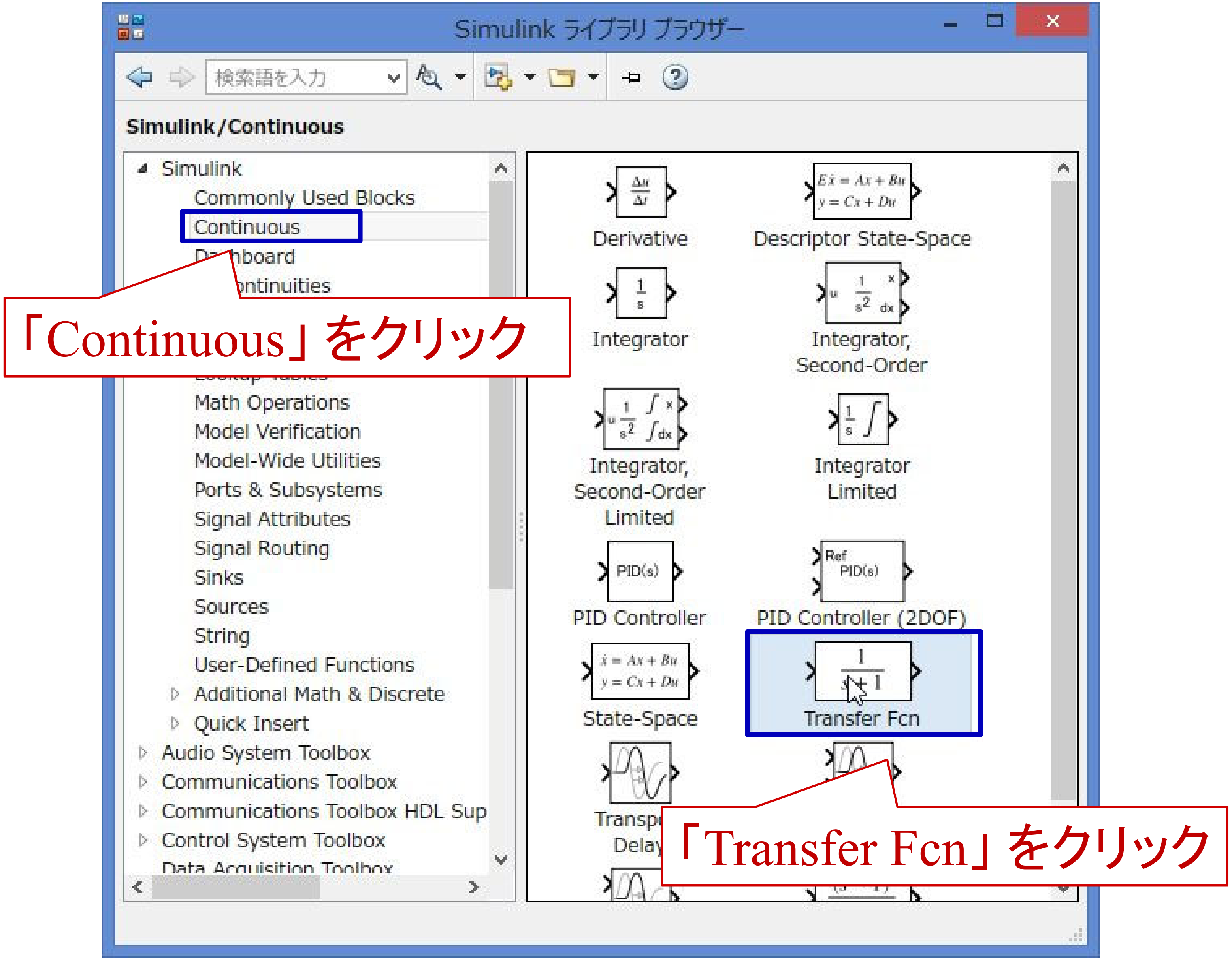
(3) $$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

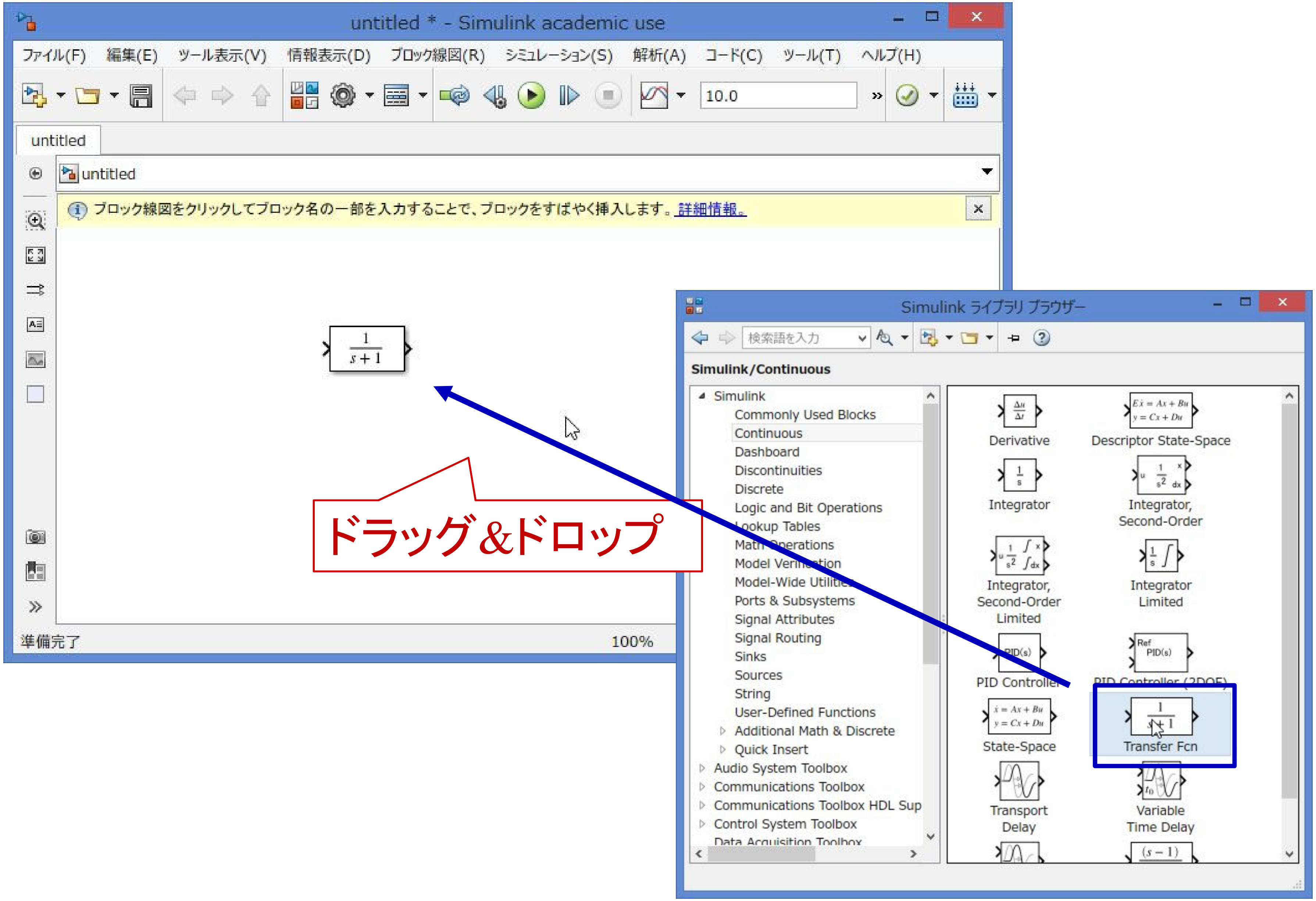
ステップ応答の計算

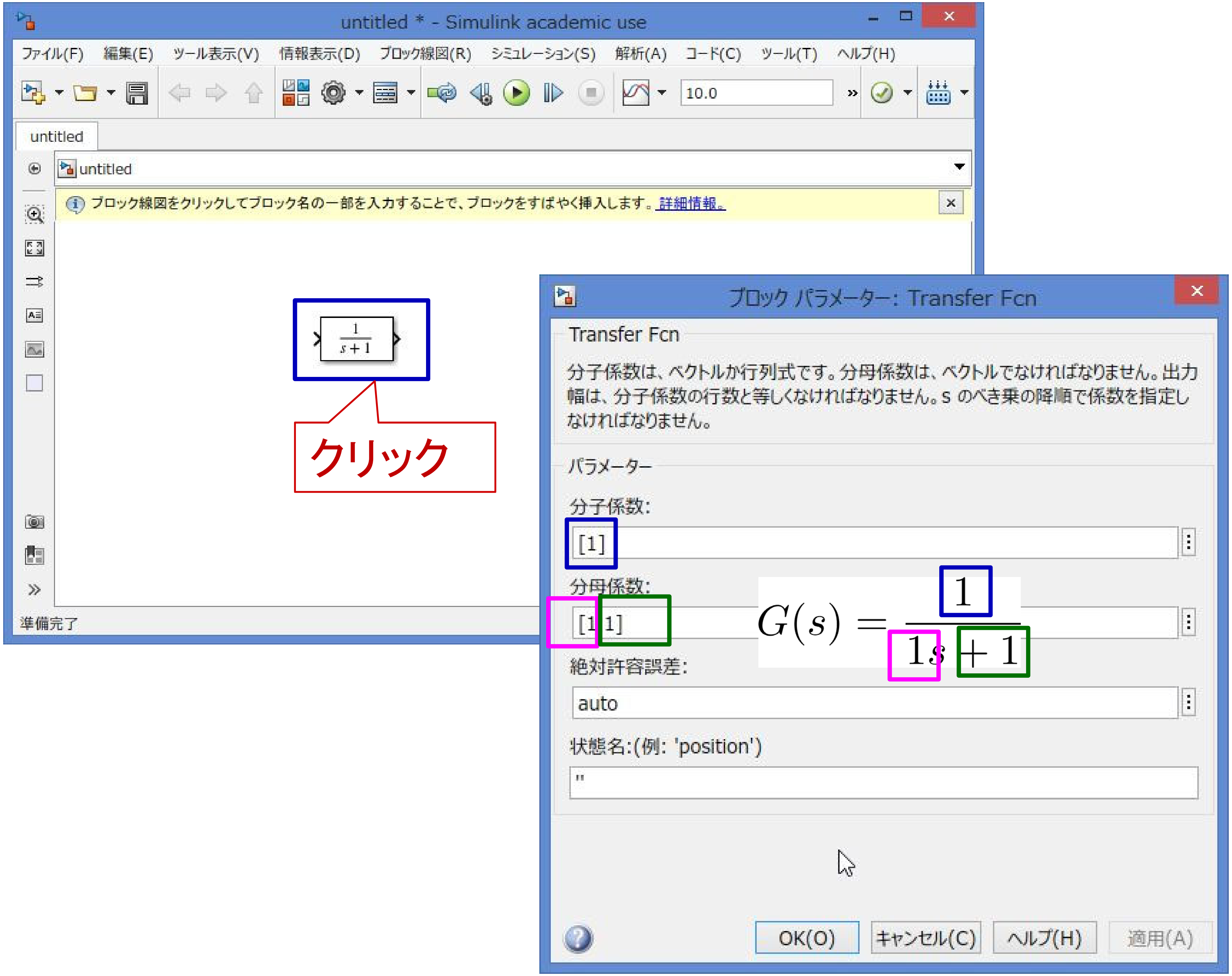

MATLAB R2018b - academic use
ホーム
プロット
アプリ
ウィンドウの切り替え
Simulink
「Simulink」をクリック
新しい MATLAB グラフィックス システムについて
MATLAB R2014b には新しい既定の色、フォントおよびスタイルのほか、多くの新機能を備えた新しい MATLAB グラフィックス システムが導入されています。一部の既存のコードは、このバージョンの MATLAB で機能するよう修正する必要があります。
>> prog1
prog1
>> prog1
Gs =
1
-----
s + 1
連続時間の伝達関数です。
>>


Simulink スタート ページ
SIMULINK
新規
例
開く...
最近使用した項目
プロジェクト
ソース管理から
アーカイブから...
検索
すべてのテンプレート
マイ テンプレート
詳細
Simulink
空のモデル
空のライブラリ
Git からのプロジェクト
SVN からのプロジェクト
「空のモデル」をクリック
Simulink を起動中...

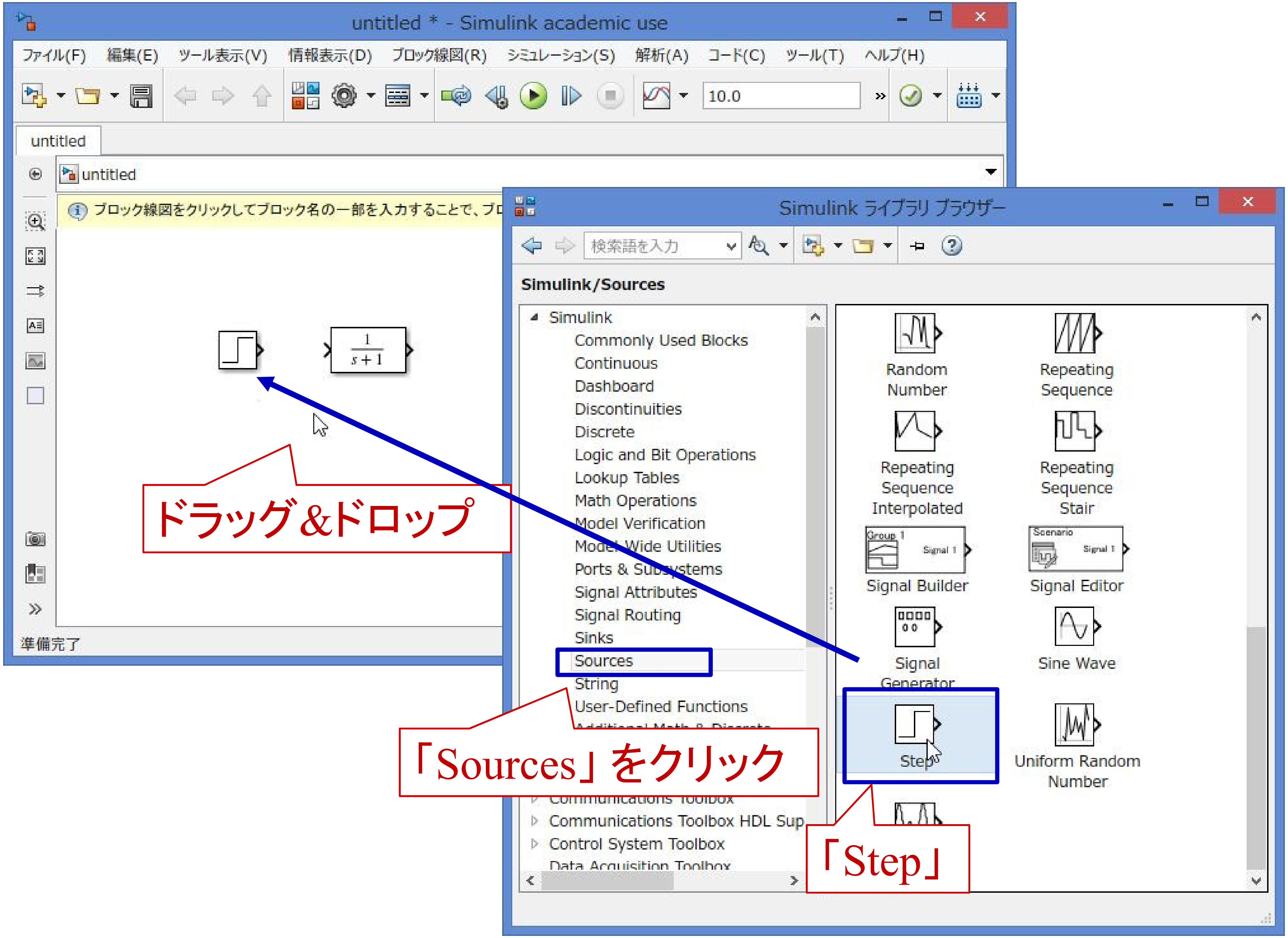

untitled - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
「ライブラリ」をクリック
準備完了
Simulink ライブラリ ブラウザー
検索語を入力
Simulink
Commonly Used Blocks
Continuous
Dashboard
Discontinuities
Discrete
Logic and Bit Operations
Lookup Tables
Math Operations
Model Verification
Model-Wide Utilities
Ports & Subsystems
Signal Attributes
Signal Routing
Sinks
Sources
String
User-Defined Functions
Additional Math & Discrete
Quick Insert
Audio System Toolbox
Communications Toolbox
Communications Toolbox HDL Sup
Control System Toolbox
Commonly Used Blocks
Continuous
Dashboard
Discontinuities
Discrete
Logic and Bit Operations
Lookup Tables
Math Operations
Model-Wide Utilities
Model Verification
Ports & Subsystems
Signal Attributes

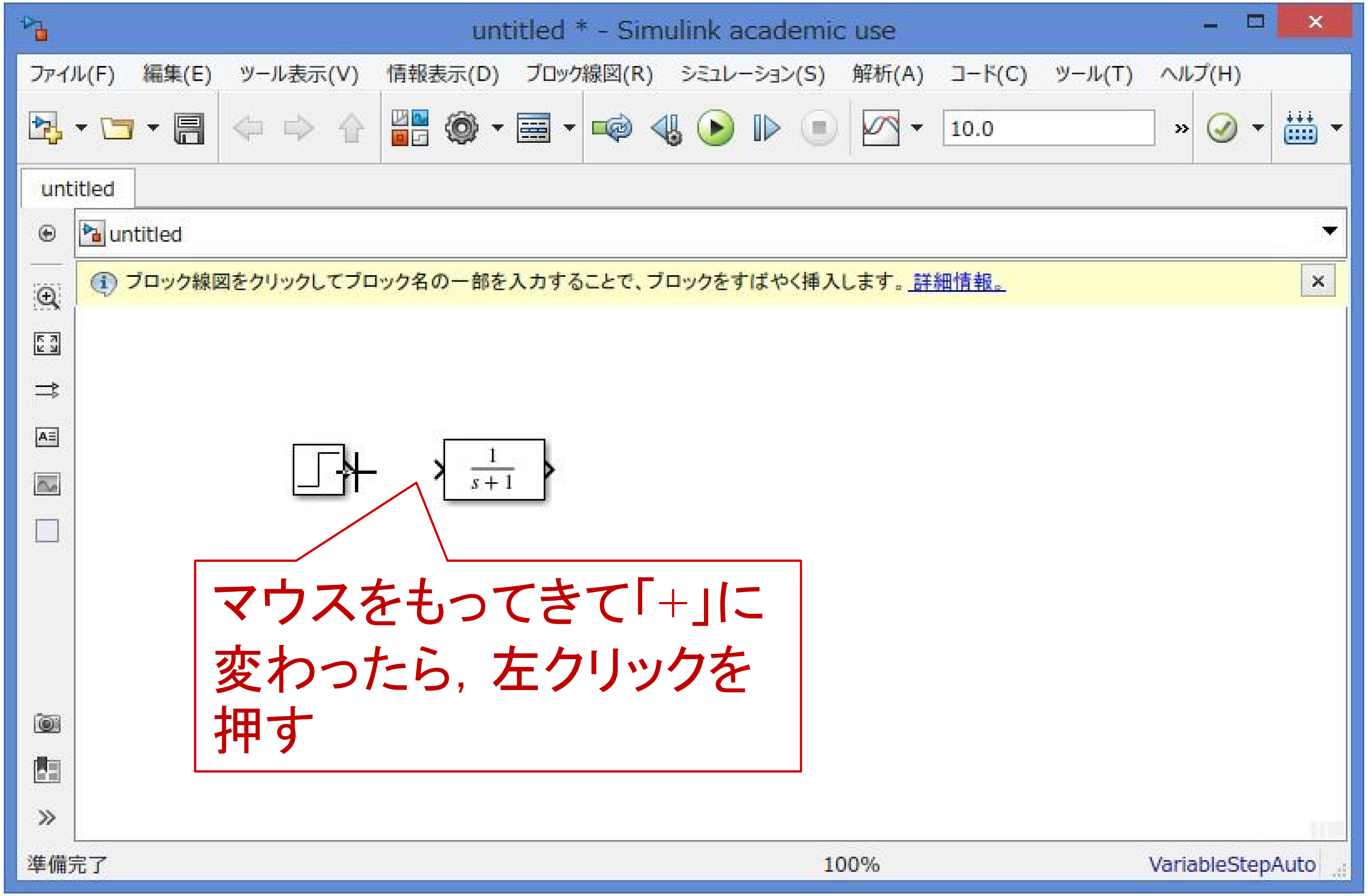

Simulink ライブラリ ブラウザー
検索語を入力
Simulink/Continuous
Simulink
Commonly Used Blocks
Continuous
Math Operations
Model Verification
Model-Wide Utilities
Ports & Subsystems
Signal Attributes
Signal Routing
Sinks
Sources
String
User-Defined Functions
Additional Math & Discrete
Quick Insert
Audio System Toolbox
Communications Toolbox
Communications Toolbox HDL Sup
Control System Toolbox
Derivative
Descriptor State-Space
Integrator
Integrator, Second-Order
Integrator, Second-Order Limited
Integrator Limited
PID Controller
PID Controller (2DOF)
State-Space
Transfer Fcn
「Continuous」をクリック
「Transfer Fcn」をクリック

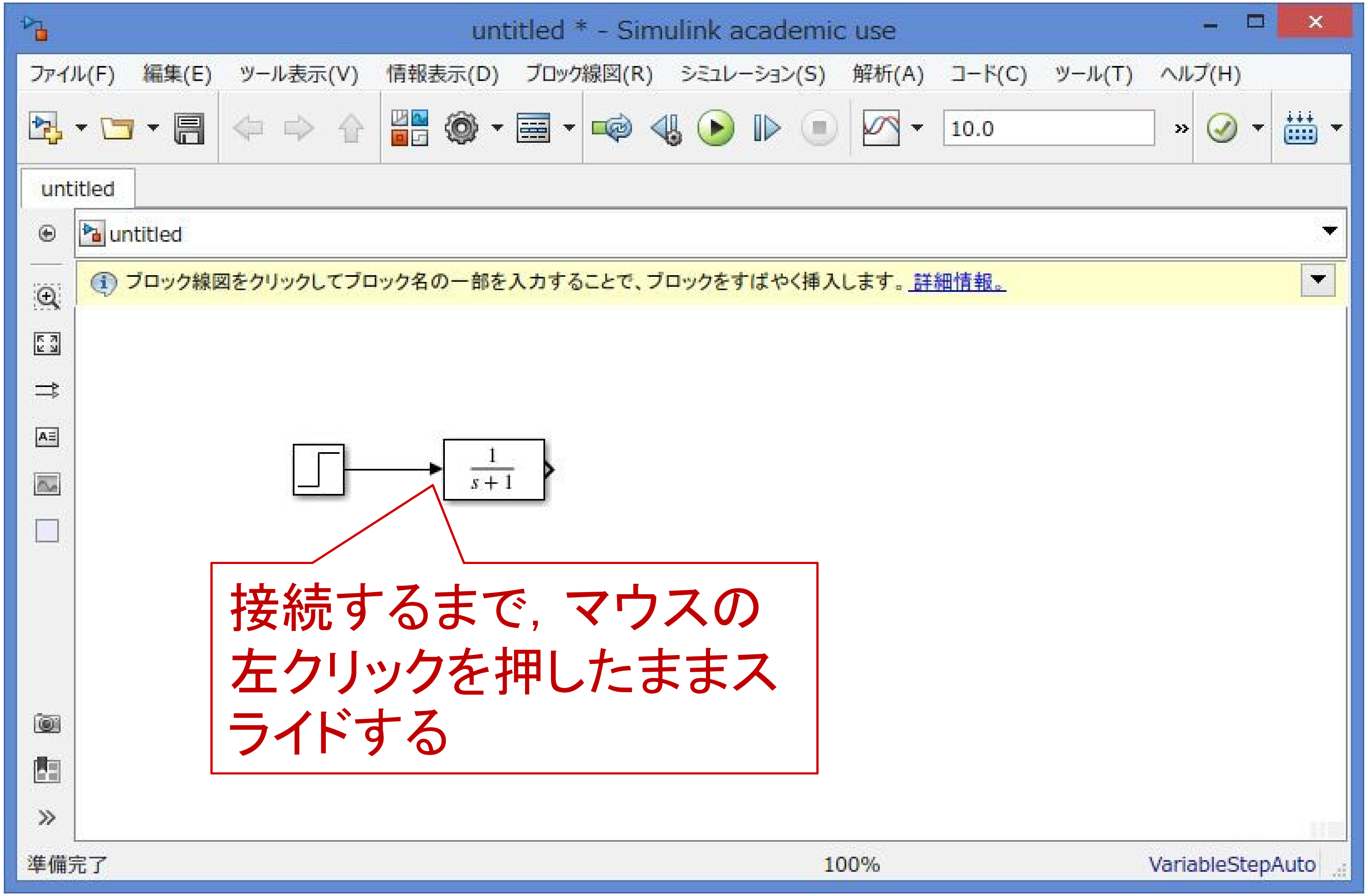

untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力することで、ブロックをすばやく挿入します。詳細情報。
ドラッグ&ドロップ
準備完了
100%
Simulink ライブラリ ブラウザー
Simulink/Continuous
Simulink
Commonly Used Blocks
Continuous
Dashboard
Discontinuities
Discrete
Logic and Bit Operations
Lookup Tables
Math Operations
Model Verification
Model-Wide Utilities
Ports & Subsystems
Signal Attributes
Signal Routing
Sinks
Sources
String
User-Defined Functions
Additional Math & Discrete
Quick Insert
Audio System Toolbox
Communications Toolbox
Communications Toolbox HDL Sup
Control System Toolbox
Derivative
Descriptor State-Space
Integrator
Integrator, Second-Order
Integrator, Second-Order Limited
Integrator Limited
PID Controller
PID Controller (2DOF)
State-Space
Transfer Fcn
Transport Delay
Variable Time Delay

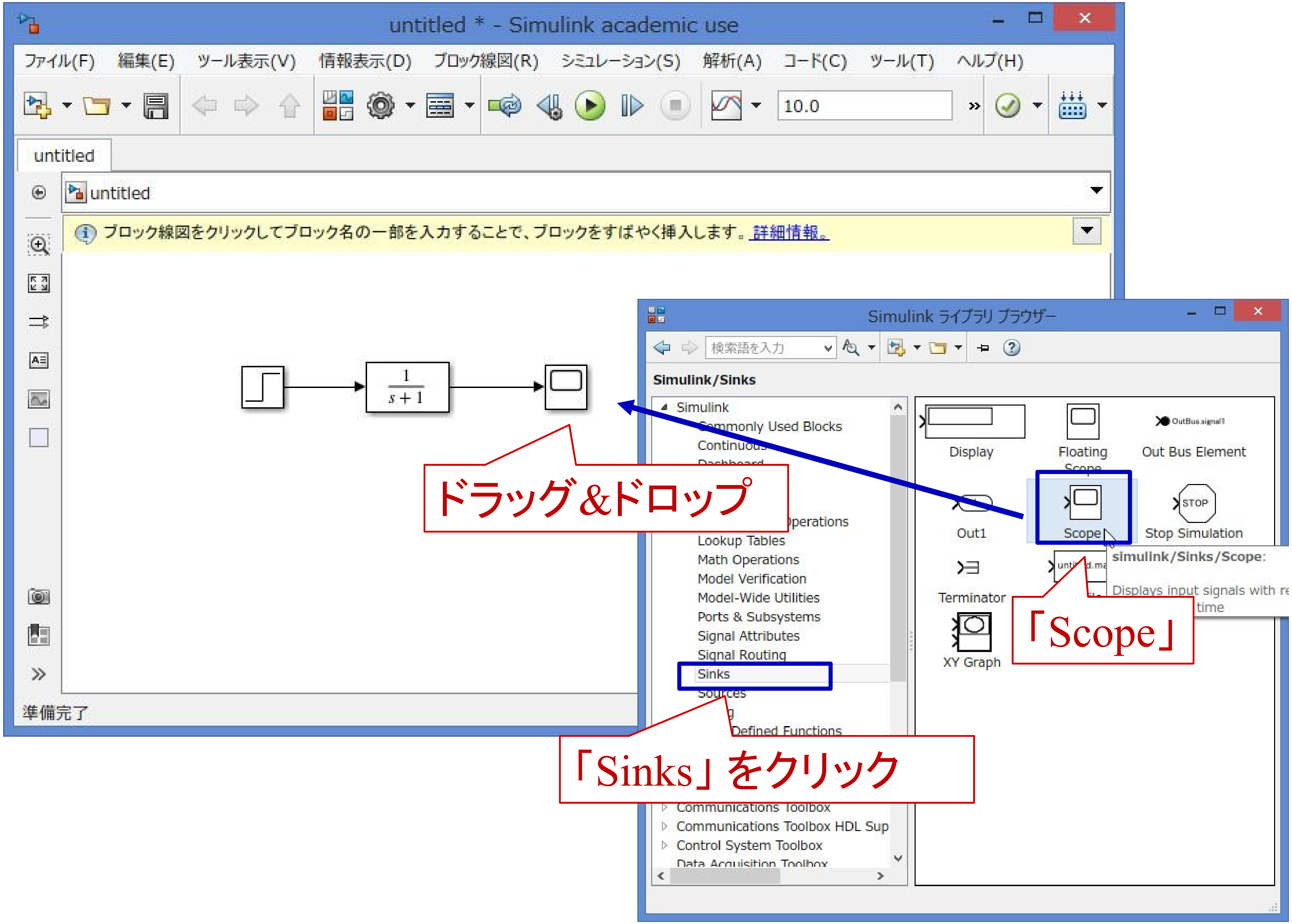


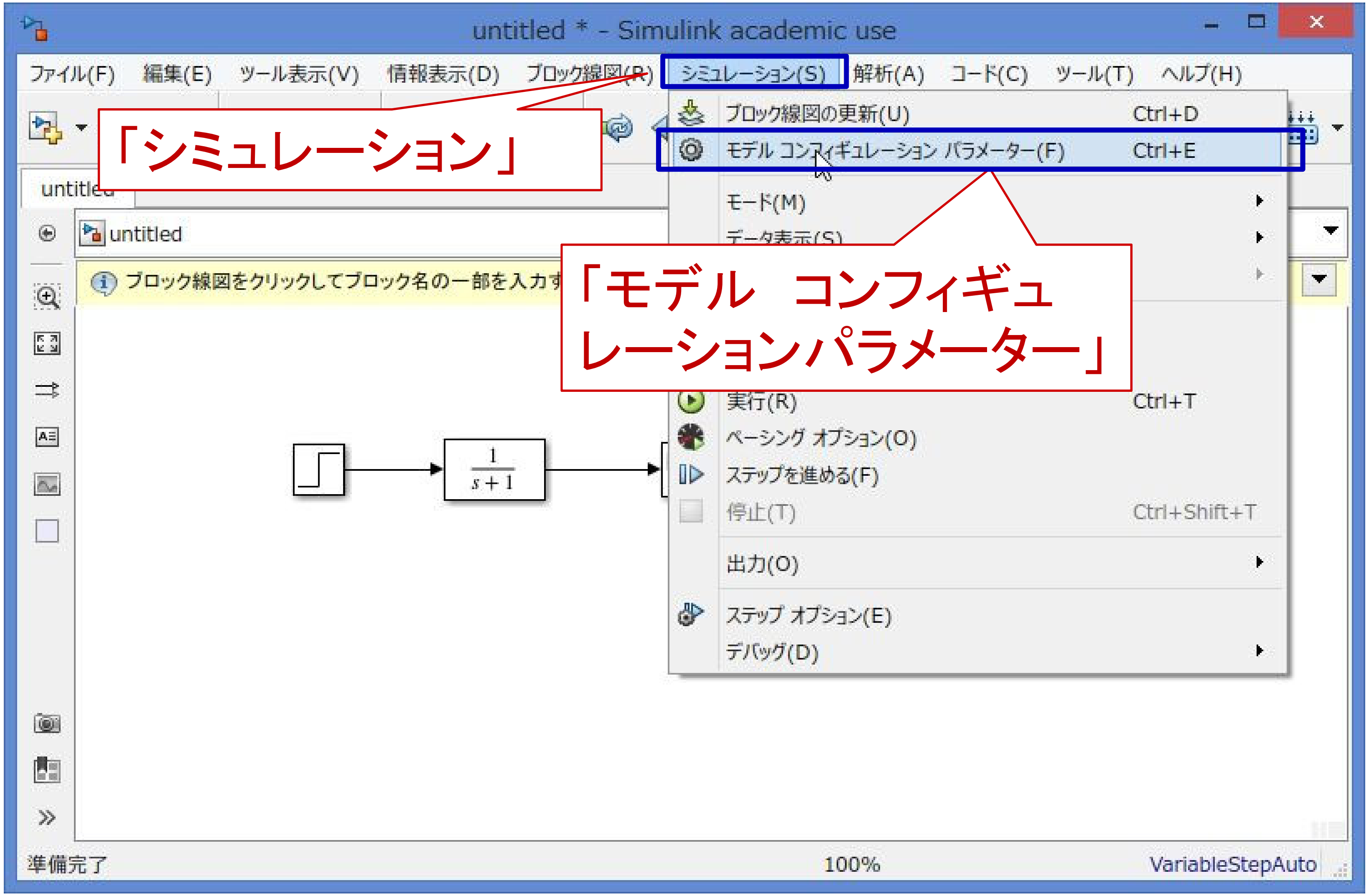
untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力することで、ブロックをすばやく挿入します。詳細情報。
クリック
準備完了
ブロック パラメーター: Transfer Fcn
Transfer Fcn
分子係数は、ベクトルか行列式です。分母係数は、ベクトルでなければなりません。出力幅は、分子係数の行数と等しくなければなりません。s のべき乗の降順で係数を指定しなければなりません。
パラメーター
分子係数:
[1]
分母係数:
[1 1]
$G(s) = \frac{1}{1s + 1}$
絶対許容誤差:
auto
状態名:(例: 'position')
''
OK(O) キャンセル(C) ヘルプ(H) 適用(A)

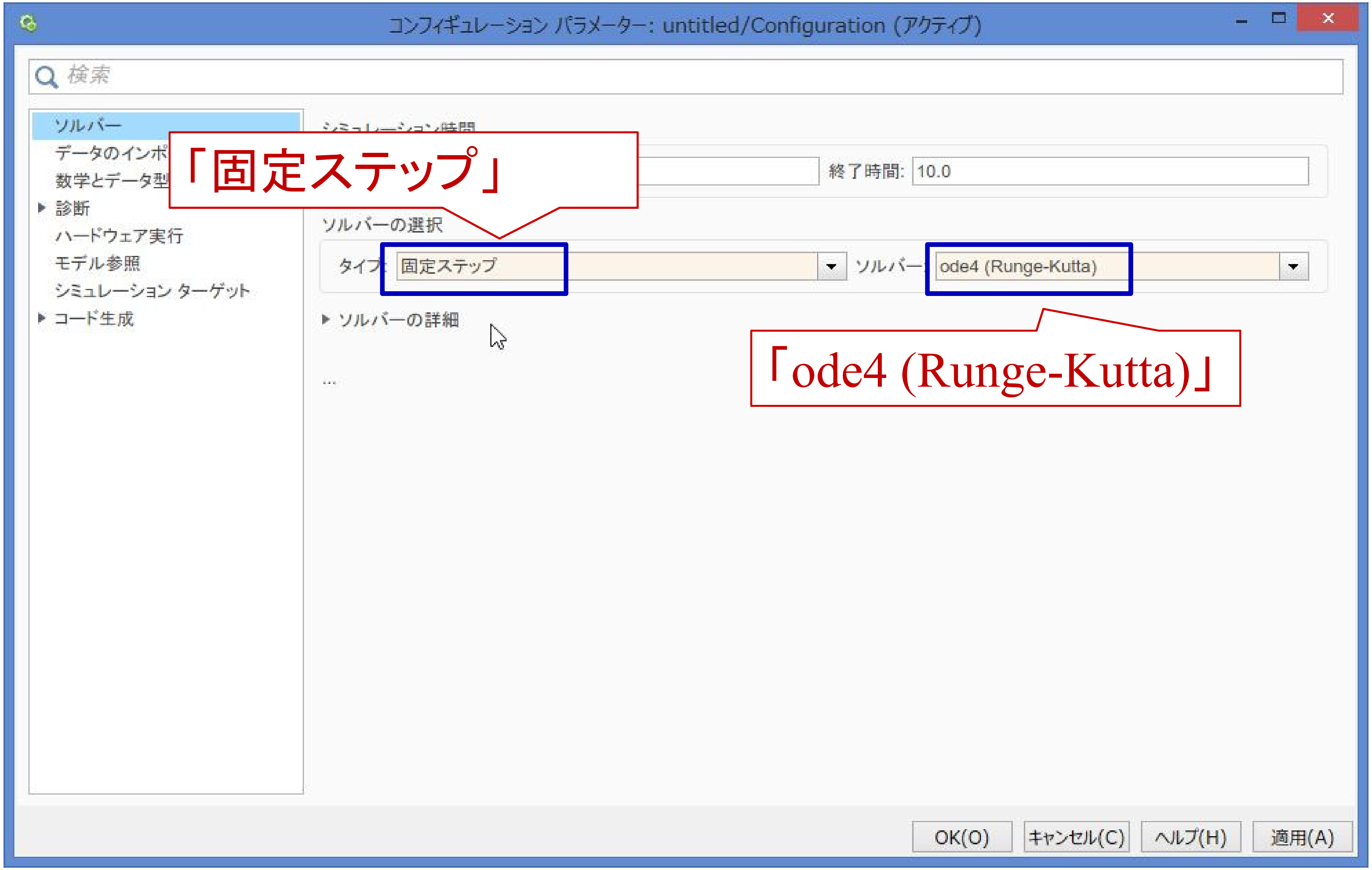

untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力することで、ブロ
準備完了
Simulink ライブラリ ブラウザー
検索語を入力
Simulink/Sources
Simulink
Commonly Used Blocks
Continuous
Dashboard
Discontinuities
Discrete
Logic and Bit Operations
Lookup Tables
Math Operations
Model Verification
Model-Wide Utilities
Ports & Subsystems
Signal Attributes
Signal Routing
Sinks
Sources
String
User-Defined Functions
Communications Toolbox HDL Sup
Control System Toolbox
Random Number
Repeating Sequence
Repeating Sequence Interpolated
Repeating Sequence Stair
Signal Builder
Signal Editor
Signal Generator
Sine Wave
Step
Uniform Random Number
ドラッグ&ドロップ
「Sources」をクリック
「Step」

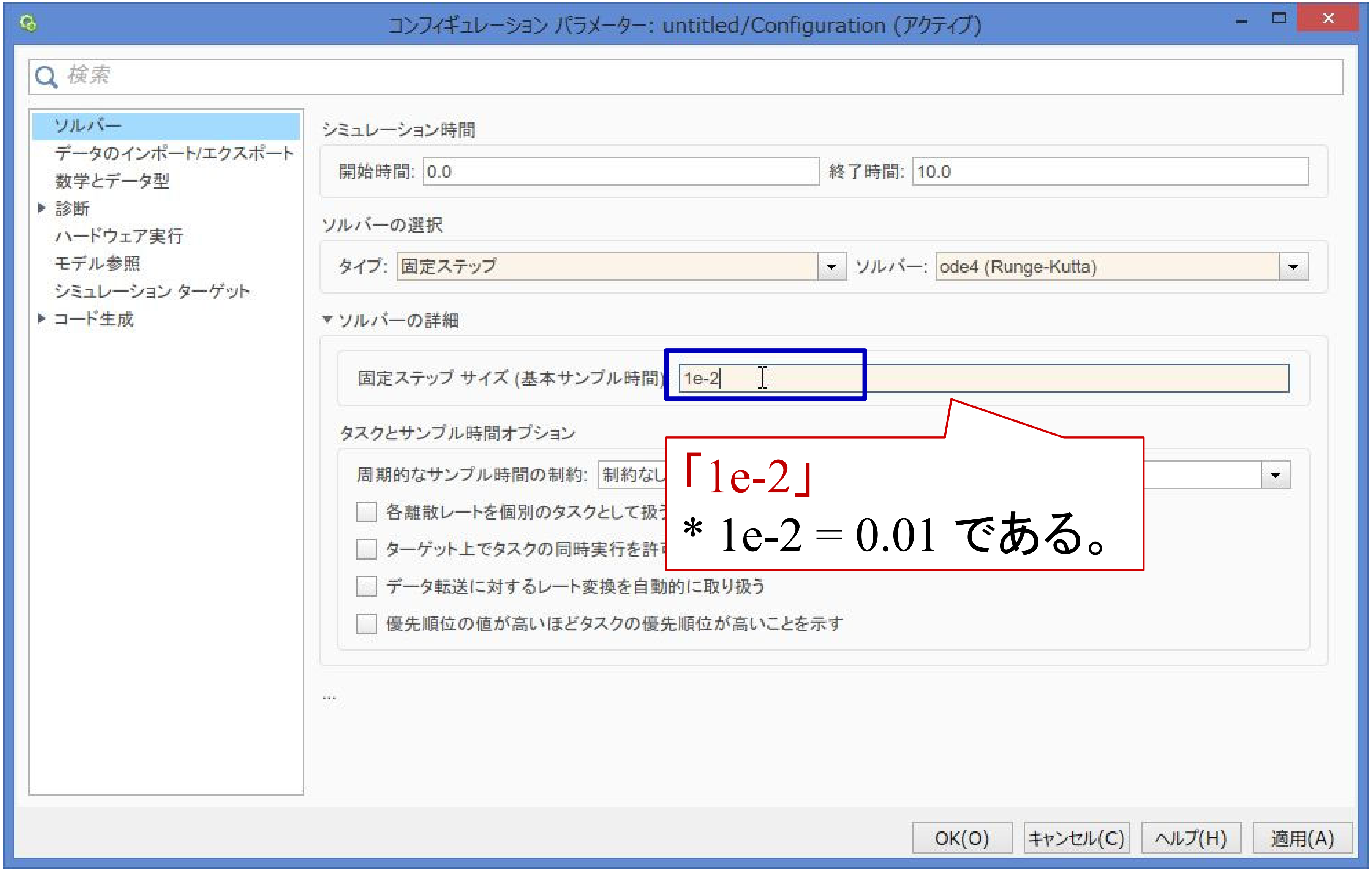

untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力することで、ブロックをすばやく挿入します。詳細情報。
1
s + 1
マウスをもってきて「+」に変わったら，左クリックを押す
準備完了
100%
VariableStepAuto

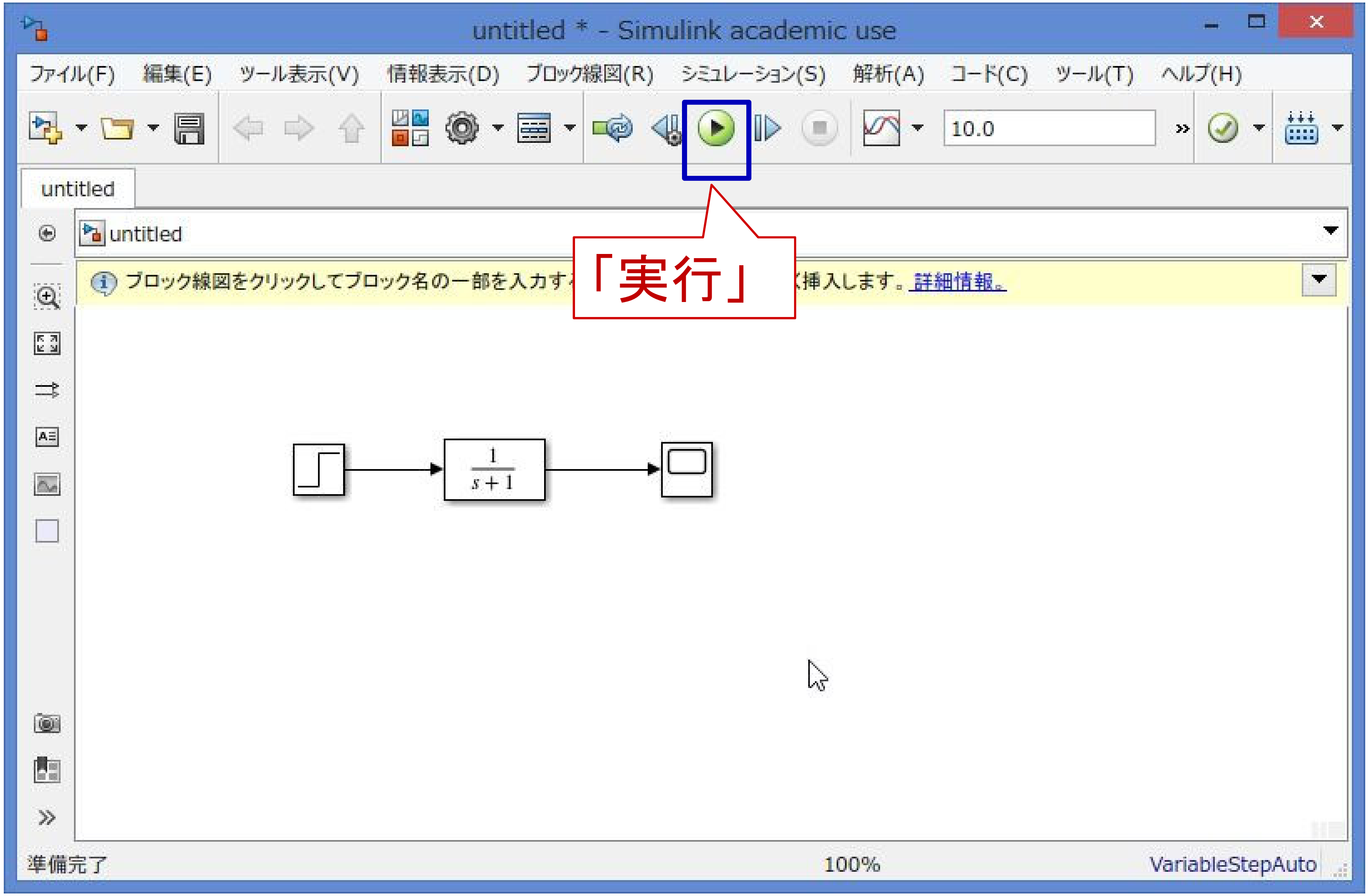

untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力することで、ブロックをすばやく挿入します。詳細情報。
1
s+1
接続するまで，マウスの左クリックを押したままスライドする
準備完了
100%
VariableStepAuto

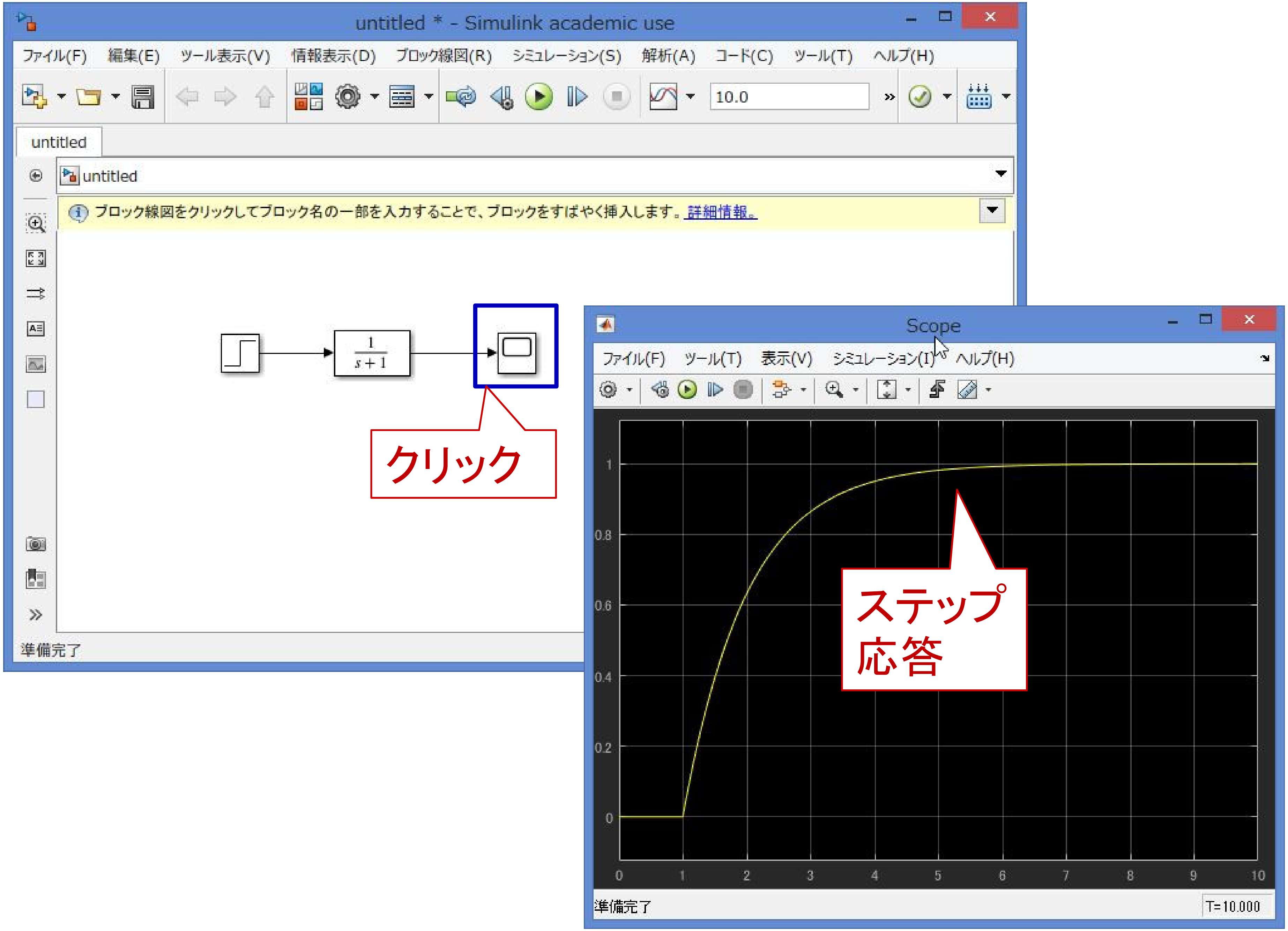

ドラッグ&ドロップ
「Scope」
「Sinks」をクリック


untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(B) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
「シミュレーション」
ブロック線図の更新(U) Ctrl+D
モデル コンフィギュレーション パラメーター(F) Ctrl+E
モード(M)
「モデル　コンフィギュレーションパラメーター」
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力す
実行(R) Ctrl+T
ページング オプション(O)
ステップを進める(F)
停止(T) Ctrl+Shift+T
出力(O)
ステップ オプション(E)
デバッグ(D)
準備完了
100%
VariableStepAuto


コンフィギュレーション パラメーター: untitled/Configuration (アクティブ)
検索
ソルバー
データのインポ
数学とデータ型
診断
ハードウェア実行
モデル参照
シミュレーション ターゲット
コード生成
終了時間: 10.0
ソルバーの選択
タイプ: 固定ステップ
ソルバー: ode4 (Runge-Kutta)
ソルバーの詳細
「固定ステップ」
「ode4 (Runge-Kutta)」
OK(O)
キャンセル(C)
ヘルプ(H)
適用(A)


コンフィギュレーション パラメーター: untitled/Configuration (アクティブ)
検索
ソルバー
データのインポート/エクスポート
数学とデータ型
診断
ハードウェア実行
モデル参照
シミュレーション ターゲット
コード生成
シミュレーション時間
開始時間: 0.0
終了時間: 10.0
ソルバーの選択
タイプ: 固定ステップ
ソルバー: ode4 (Runge-Kutta)
ソルバーの詳細
固定ステップ サイズ (基本サンプル時間): 1e-2
タスクとサンプル時間オプション
周期的なサンプル時間の制約: 制約なし
各離散レートを個別のタスクとして扱う
ターゲット上でタスクの同時実行を許可
データ転送に対するレート変換を自動的に取り扱う
優先順位の値が高いほどタスクの優先順位が高いことを示す
「1e-2」
* 1e-2 = 0.01 である。
OK(O)
キャンセル(C)
ヘルプ(H)
適用(A)


untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力す
挿入します。詳細情報。
「実行」
1
s + 1
準備完了
100%
VariableStepAuto

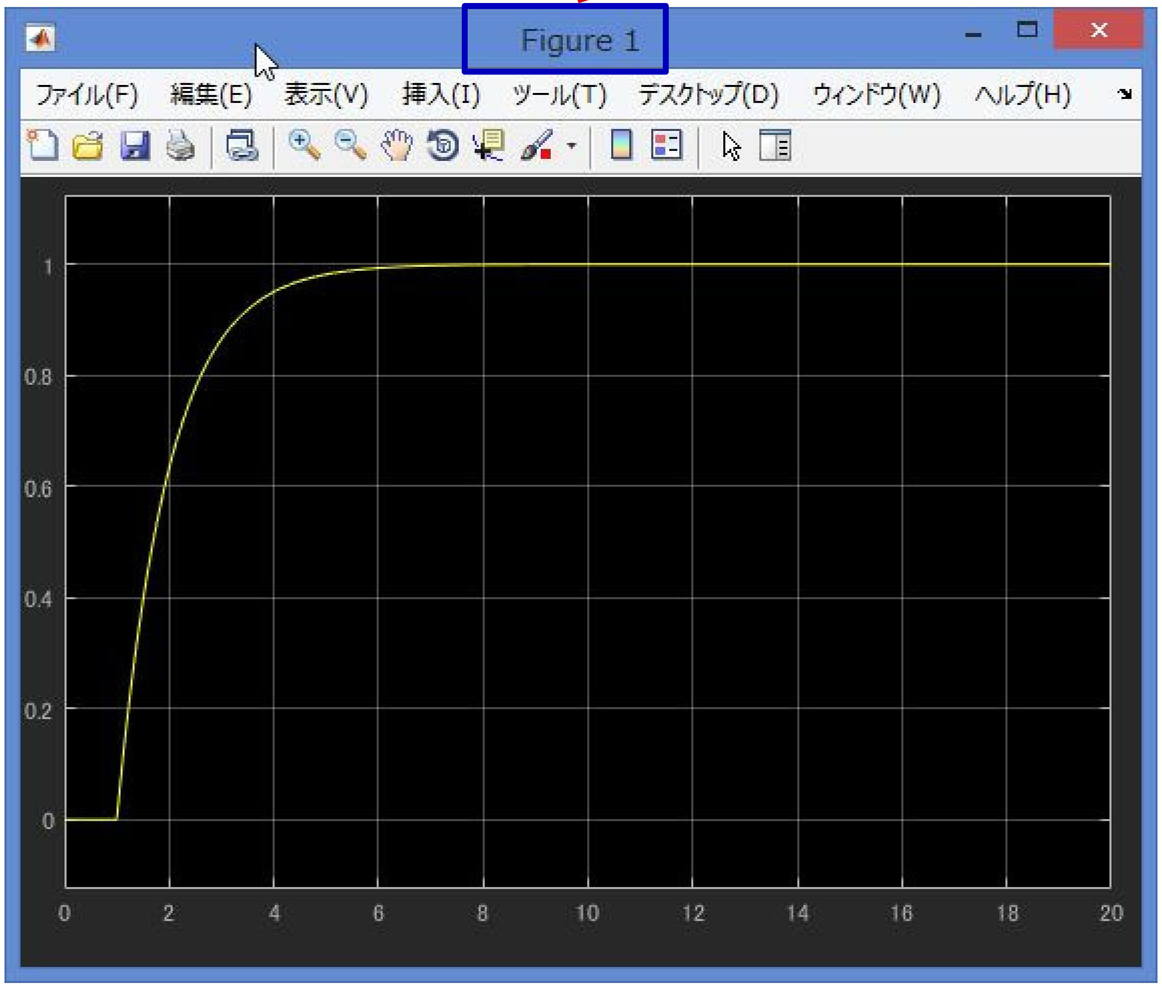


untitled * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
10.0
untitled
ブロック線図をクリックしてブロック名の一部を入力することで、ブロックをすばやく挿入します。詳細情報。
1
s+1
クリック
準備完了
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
ステップ
応答
準備完了
T=10.000

図の保存

「ファイル」
Scope
ファイル(F)
ツール(T)
表示(V)
シミュレーション(I)
ヘルプ(H)
シミュレーションの起動時に開く(T)
入力端子の数(U)
クリップボードにコピー(Y) Ctrl+C
印刷(P)... Ctrl+P
印刷プレビュー(V)
Figure へ出力(R)
閉じる(C) Ctrl+W
「Figureへ出力」
0.4
0.2
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
準備完了
サンプル ベース
T=20.000

「Figure1」に変わる



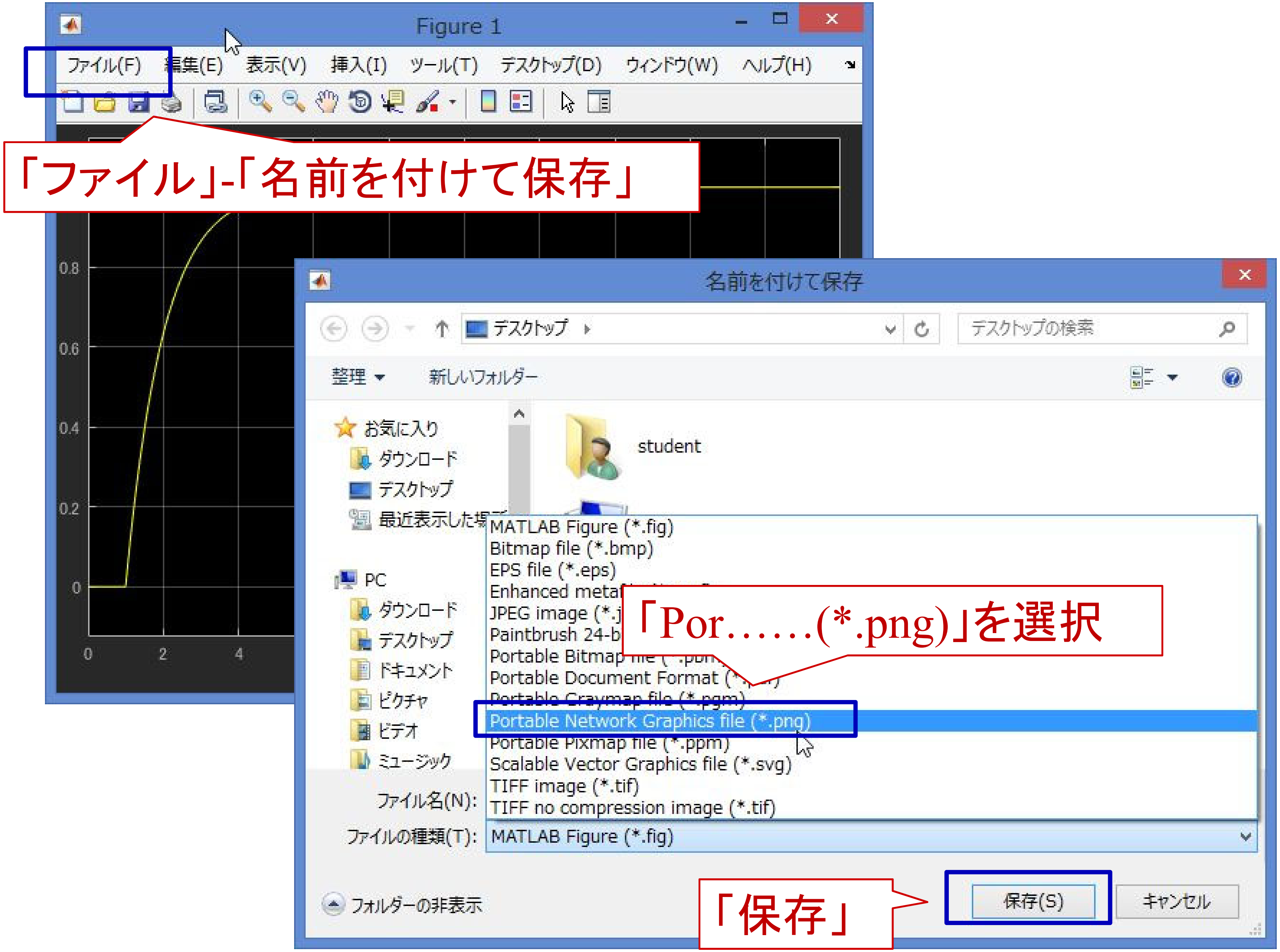


Figure 1
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) 挿入(I) ツール(T) デスクトップ(D) ウィンドウ(W) ヘルプ(H)
「ファイル」-「名前を付けて保存」
名前を付けて保存
デスクトップ
デスクトップの検索
整理
新しいフォルダー
お気に入り
ダウンロード
デスクトップ
PC
ダウンロード
デスクトップ
ドキュメント
ピクチャ
ビデオ
ミュージック
student
MATLAB Figure (*.fig)
Bitmap file (*.bmp)
EPS file (*.eps)
Portable Document Format
Portable Network Graphics file (*.png)
Portable Pixmap file (*.ppm)
Scalable Vector Graphics file (*.svg)
TIFF image (*.tif)
TIFF no compression image (*.tif)
「Por……(*.png)」を選択
ファイル名(N):
ファイルの種類(T):
MATLAB Figure (*.fig)
フォルダーの非表示
「保存」
保存(S)
キャンセル

【問題3】 次の伝達関数のステップ応答を求め下記の値を答えよ

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

(1) 遅れ時間

(2) 行き過ぎ時間

(3) オーバシュート

(4) 整定時間

(5) 減衰比

過渡応答に関する特性値

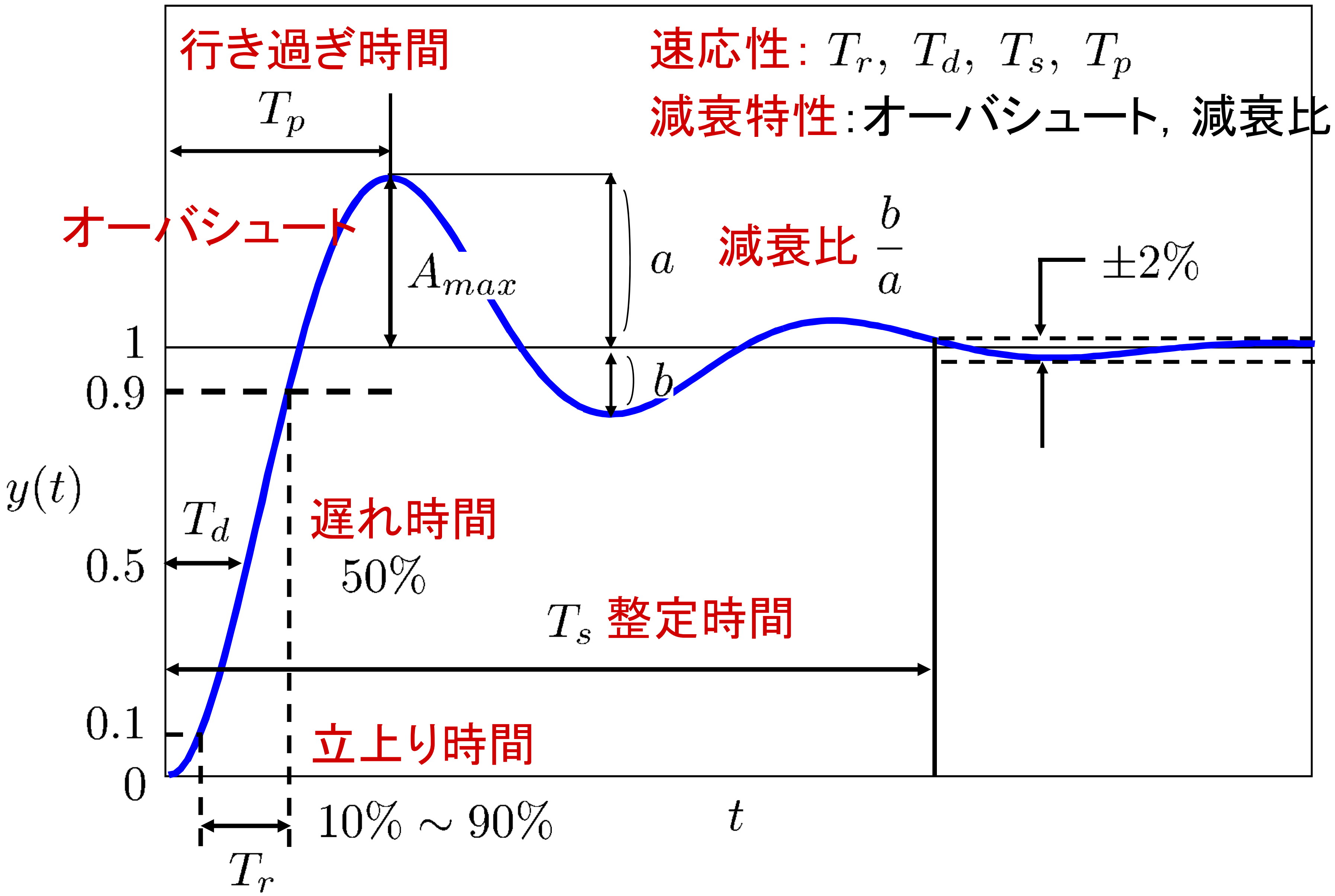
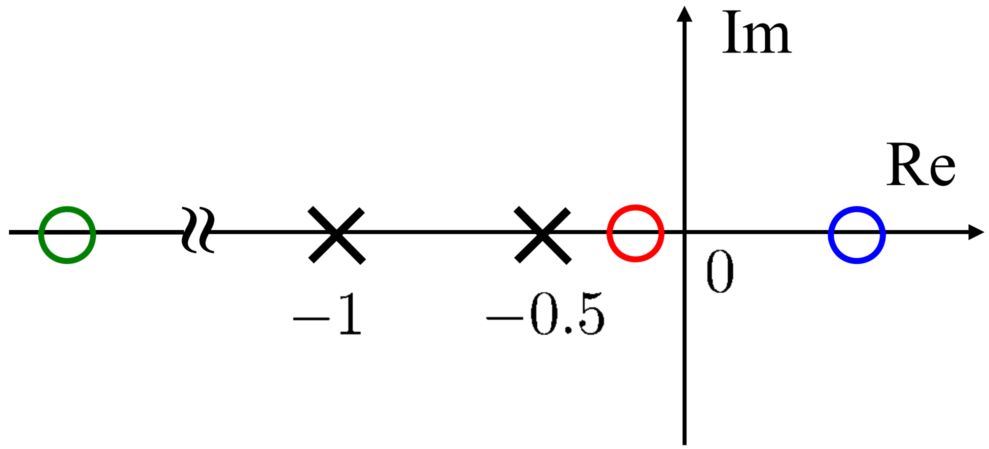


図 3.10　過渡応答と諸特性値

零点の影響

[例3.4]

$$G(s) = \frac{as+1}{(s+1)(2s+1)}$$



極: $-1, \ -0.5$

本来は,
振動しない

零点: $-\dfrac{1}{a}$

$a < 0$:（不安定）$\Rightarrow$ 逆ぶれ

a :小 $\Rightarrow$ 影響なし

a :大 $\Rightarrow$ オーバシュート

原点に近い極の応答が全体の応答になる。

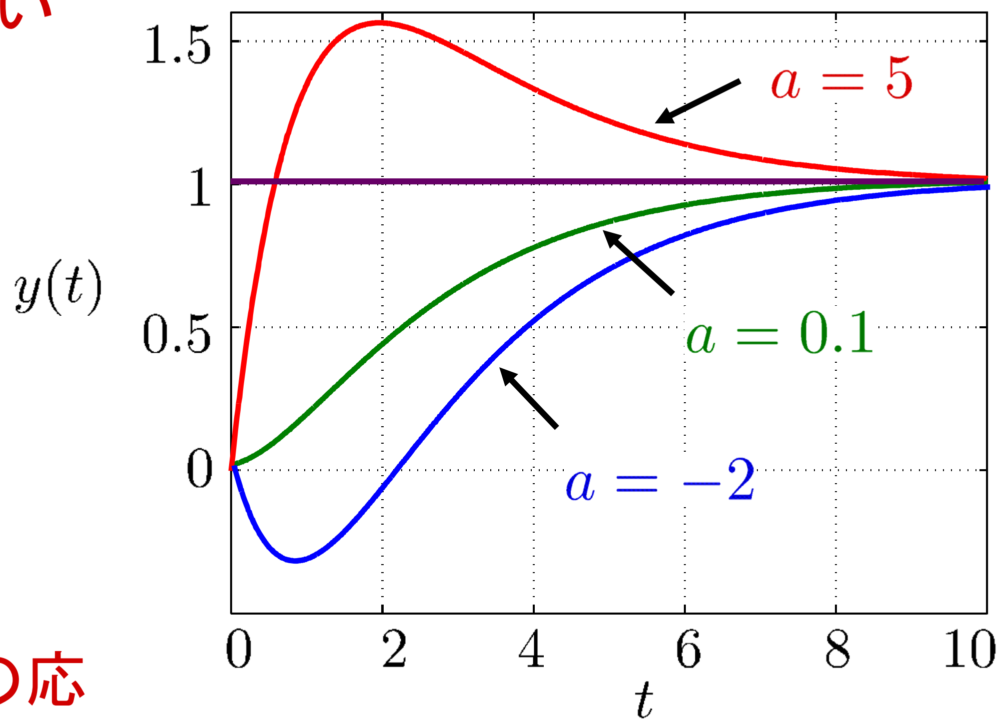
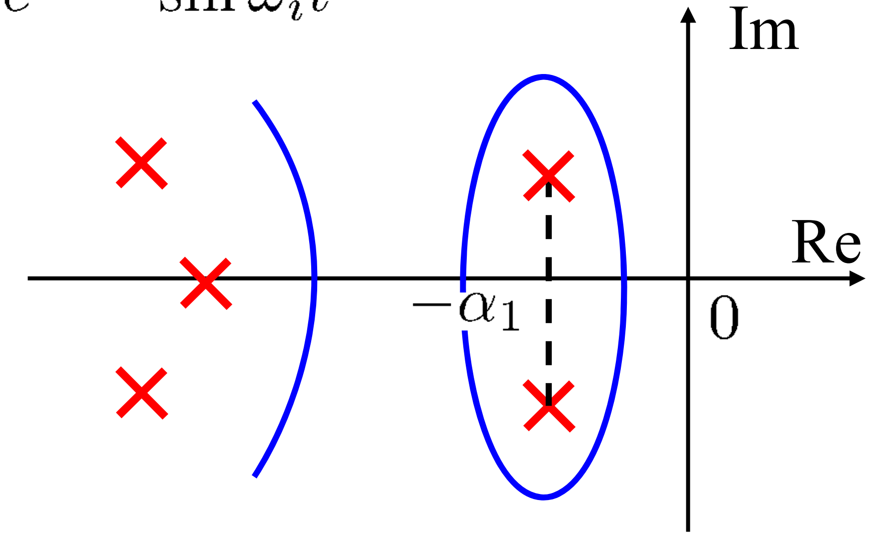


図 3.13 零点の影響

代表極

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 \ll \alpha_j \quad (j = 2 \sim N) \\ 0 < \alpha_1 \ll \sigma_j \quad (j = 1 \sim M) \end{cases}$$



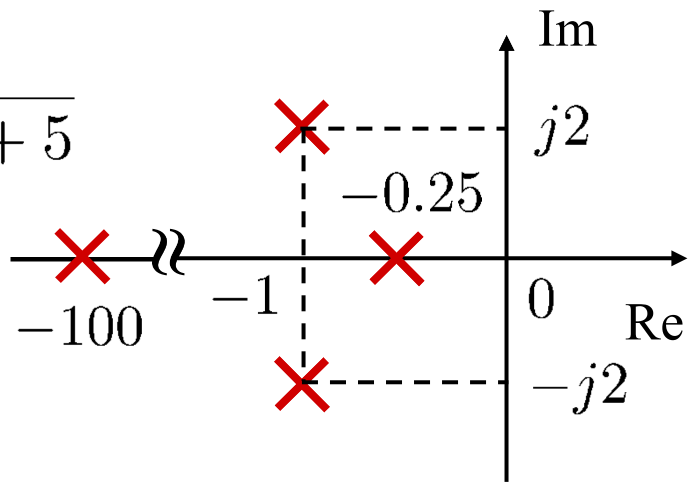
$e^{-\alpha_j t}$, $e^{-\sigma_j t}$ は急速に減少

最も遅いモードは $\underbrace{e^{-\alpha_1 t}}_{\text{代表極}}$ が支配

$$y(t) \approx A_0 + \frac{B_1}{\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t$$

[例 3.3]

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$



$$\tau s + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{\tau}$$

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -1 \pm j2$$

遅い方に引きずられている

- $\tau = 0.01 \quad -\dfrac{1}{\tau} = -100 \quad G \approx G_2$
- $\tau = 4 \quad -\dfrac{1}{\tau} = -0.25 \quad G \approx G_1$

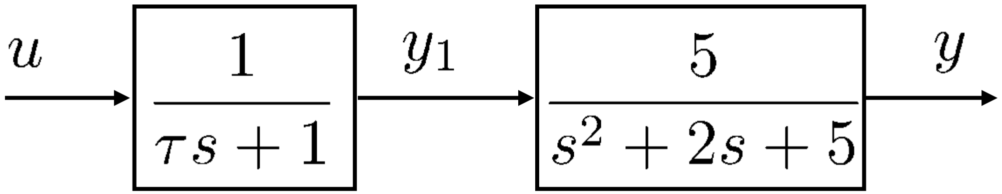


図 3.7 3次系のブロック線図

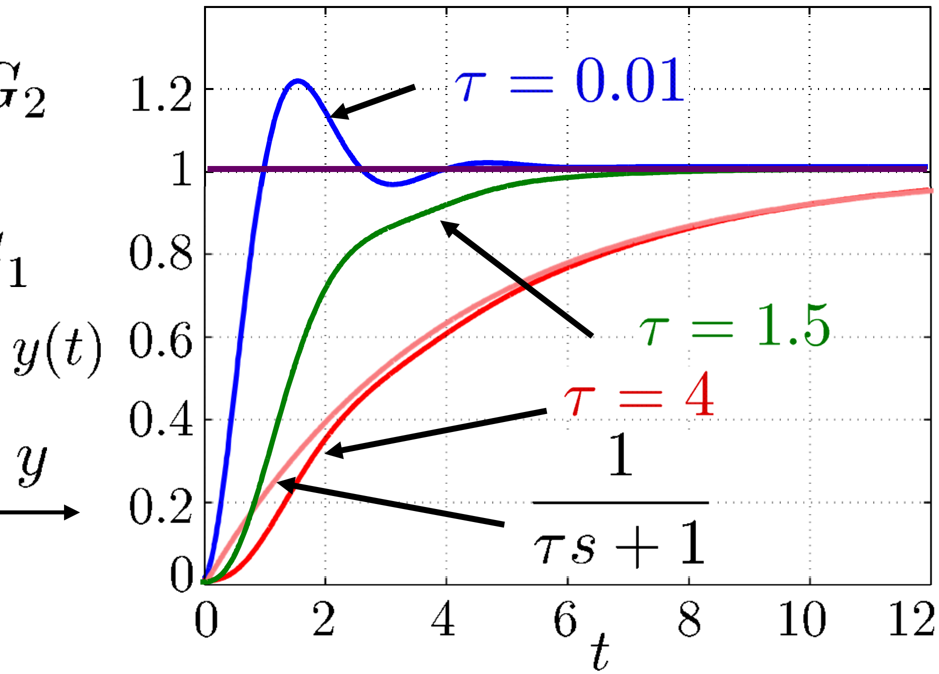


図 3.12 3次系の応答例

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード：　過渡応答，極，零点

学習目標：極･零点と過渡応答の関係について理解する。