第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

キーワード：　安定性, ラウスの安定判別法

学習目標：システムの安定性の概念を理解する。また, システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するラウスの安定判別法を習得する。

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

安定性（有界入力 有界出力安定(BIBO 安定)）

有界な大きさの任意の入力($|u(t)| < \infty$)に対して，その出力がやはり有界($|y(t)| < \infty$)であるとき，安定という.

$$\int_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$$

安定でない ＝ 不安定

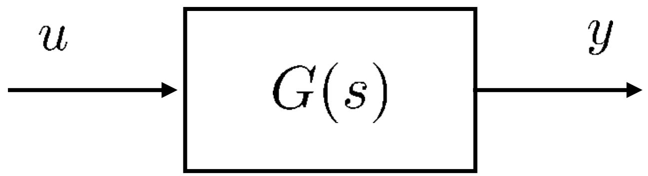


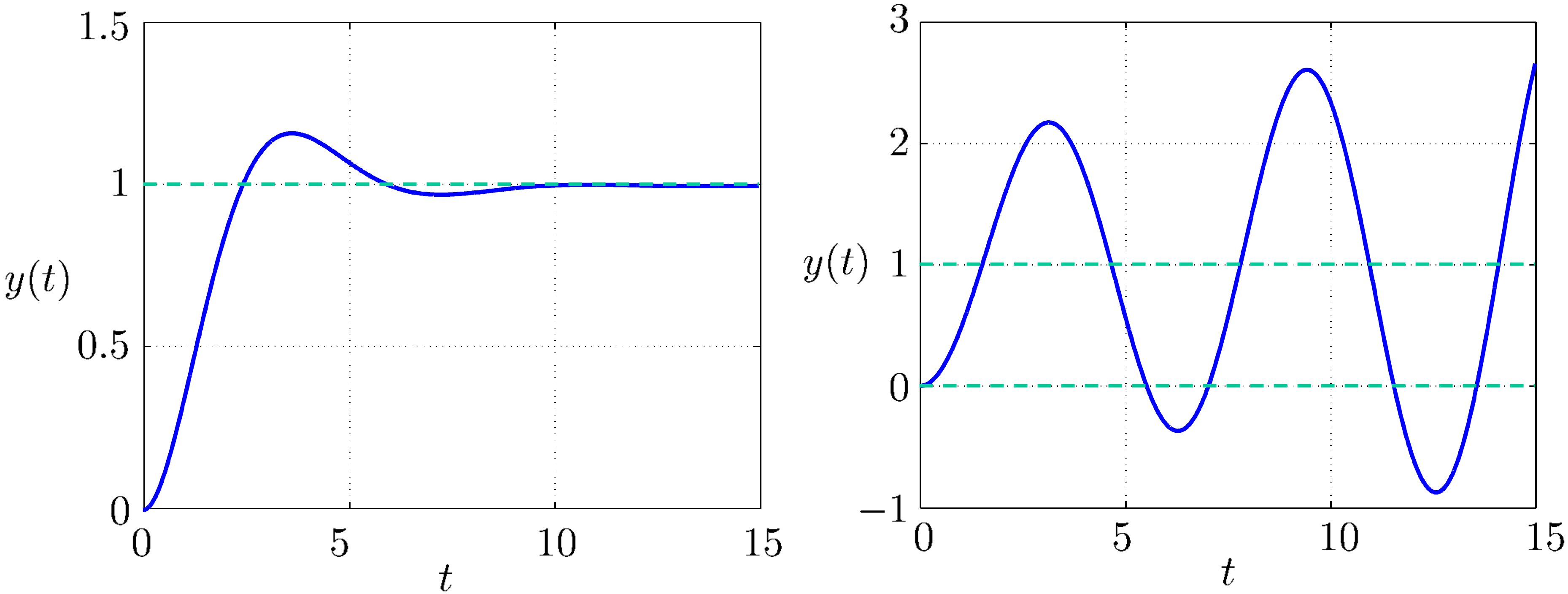
図 3.1　線形ダイナミカルシステム

安定性：（実際には）

ステップ応答が，一定値に収束すること

［ 例 ］

$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \qquad G_b(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1s + 1}$$



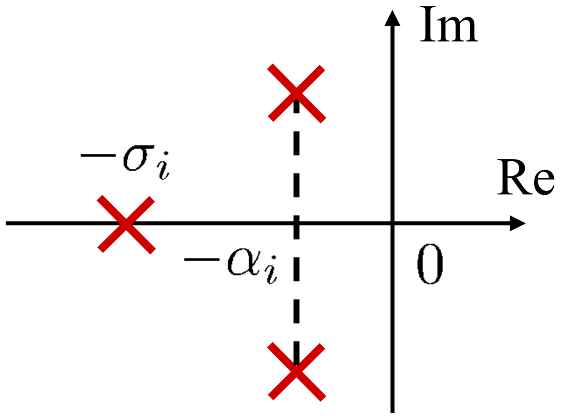
（a）安定なシステムの応答　　（b）不安定なシステムの応答

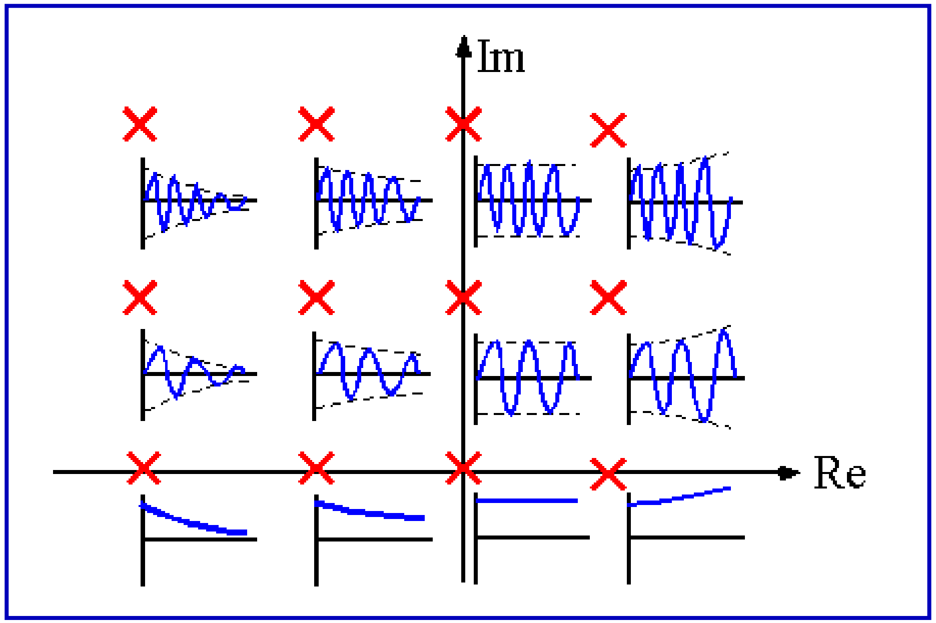
図 3.14 ステップ応答例

（ステップ応答）

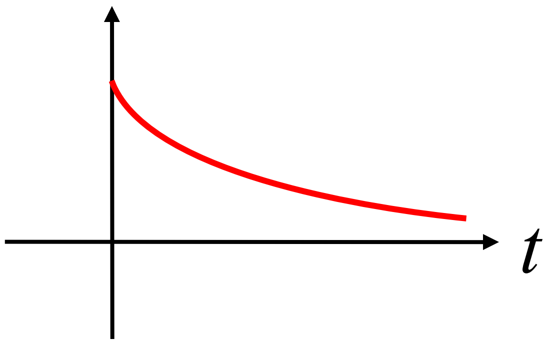
$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$

$-\sigma_i < 0, \ -\alpha_i < 0$ ならば,

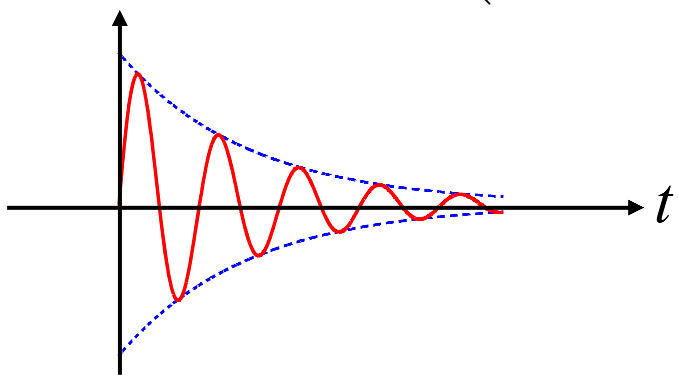




$e^{-\sigma_i t} \to 0 \ (t \to \infty)$

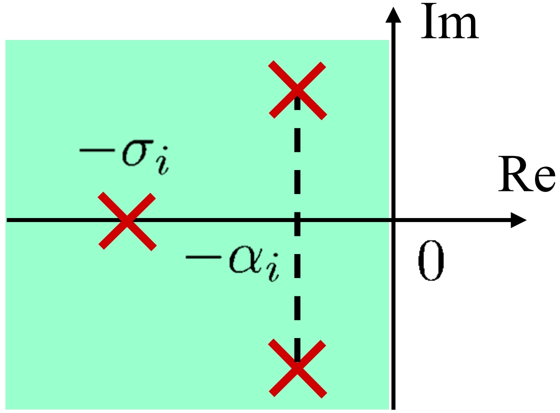


$e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t \to 0 \ (t \to \infty)$



そうでなければ,
発散（振動）する

安定性の必要十分条件



（条件A） すべての極の実部が負

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (a_n > 0)$$
$$= a_n \prod_{i=1}^{M} (s + \sigma_i) \prod_{i=1}^{N} \left(s^2 + 2\alpha_i s + (\alpha_i^2 + \omega_i^2)\right)$$

（条件A） $\sigma_i > 0,\ \alpha_i > 0$

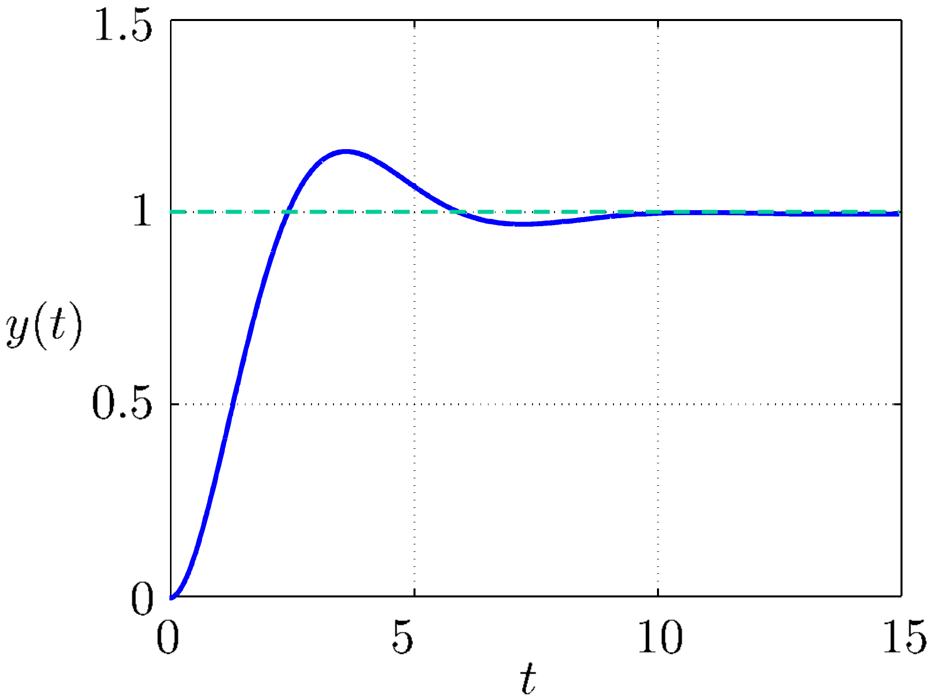
安定性の必要条件

（条件B） すべての係数 $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots, a_0$ が正

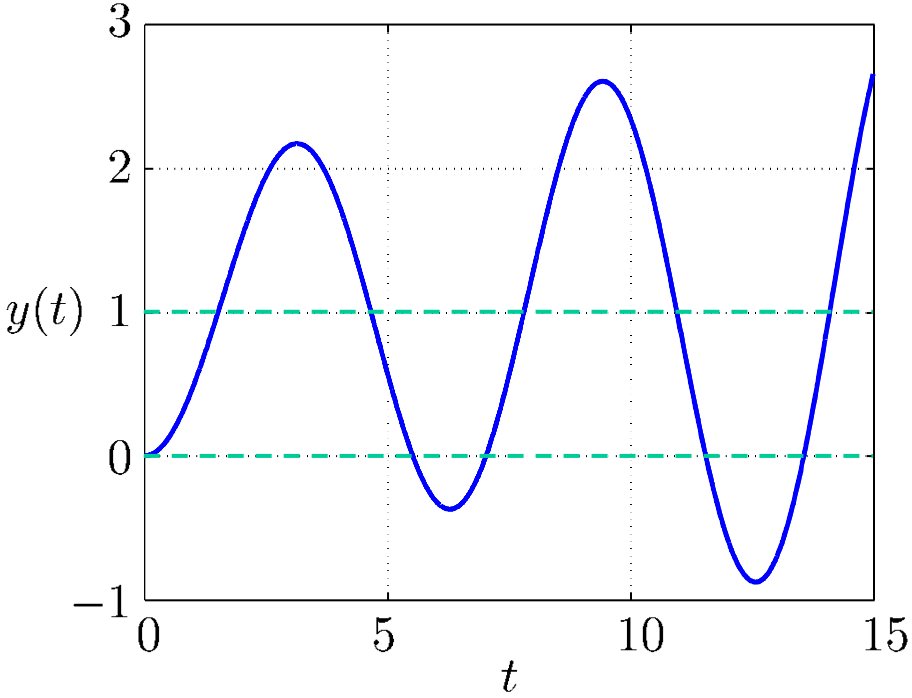
安定性の必要条件

（条件B） すべての係数 a_n，a_{n-1}，$\cdots,a_0$ が正

［例］ $G_a(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$　　$G_b(s)=\dfrac{1}{s^2\underline{-0.1s}+1}$



（a） 安定なシステムの応答



（b） 不安定なシステムの応答

図 3.14 ステップ応答例

[例]（必要性）

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$D_1(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2$$

$+1 \quad +1 \quad +3 \quad +2 \quad +6 \quad +2$ （条件B：OK）

$$D_2(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$ （条件B：OK）

$+1 \quad +1 \quad +6 \quad +3 \quad +4 \quad +1$

共に安定か？

$D_1(s) = 0$ の根

$\underline{0.56 \pm 1.37j,} \quad -0.89 \pm 1.33j, \quad -0.35$ 不安定

$D_2(s) = 0$ の根

$-0.26 \pm 2.21j, \quad -0.10 \pm 0.85j, \quad -0.28$ 安定

ラウスの安定判別法

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (a_n > 0)$$

ラウス表

s^n	$\underset{a_n}{\underline{R_{11}}}$	$\underset{a_{n-2}}{\underline{R_{12}}}$	$\underline{R_{13}}$	$\underline{R_{14}}$	$\cdots$
s^{n-1}	$\underset{a_{n-1}}{\underline{R_{21}}}$	$\underset{a_{n-3}}{\underline{R_{22}}}$	$\underline{R_{23}}$	$\underline{R_{24}}$	$\cdots$
s^{n-2}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	$\cdots$	$\cdots$
s^{n-3}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^2	$R_{n-1\ 1}$	$R_{n-1\ 2}$	0		
s	$R_{n\ 1}$	0			
s^0	$R_{n+1\ 1}$	0			

（存在しない項は 0）

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (a_n > 0)$$

ラウス表

s^n	R_{11} (a_n)	R_{12} (a_{n-2})	R_{13}	R_{14}	$\cdots$
s^{n-1}	R_{21} (a_{n-1})	R_{22} (a_{n-3})	R_{23}	R_{24}	$\cdots$
s^{n-2}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	$\cdots$	$\cdots$
s^{n-3}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^2	$R_{n-1\ 1}$	$R_{n-1\ 2}$	0		
s	$R_{n\ 1}$	0			
s^0	$R_{n+1\ 1}$	0			

ラウス数列

$$R_{31} = \frac{R_{21}R_{12} - R_{11}R_{22}}{R_{21}}$$

$$R_{32} = \frac{R_{21}R_{13} - R_{11}R_{23}}{R_{21}}$$

$$R_{41} = \frac{R_{31}R_{22} - R_{21}R_{32}}{R_{31}}$$

$$R_{42} = \frac{R_{31}R_{23} - R_{21}R_{33}}{R_{31}}$$

安定性の必要十分条件

（条件R）　(i)ラウス数列がすべて正

(ii)条件Bが成立

ラウス数列の正負の符号の反転回数

||

不安定根の数

[例題3.1]

$$D_1(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 = 0$$

s^5	$+$	1	3	6
s^4	$+$	1	2	2
s^3	$+$	$1 = \dfrac{1 \times 3 - 1 \times 2}{1}$	$4 = \dfrac{1 \times 6 - 1 \times 2}{1}$	
s^2	$-$	$-2 = \dfrac{1 \times 2 - 1 \times 4}{1}$	$2 = \dfrac{1 \times 2 - 1 \times 0}{1}$	
s^1	$+$	$5 = \dfrac{-2 \times 4 - 1 \times 2}{-2}$		
s^0	$+$	$2 = \dfrac{5 \times 2 - (-2) \times 0}{5}$		

不安定

不安定極は 2 個

[例] 未定係数 K (ゲイン)

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + s + K$$

s^3	1	1
s^2	2	K
s^1	$\dfrac{2\times 1 - 1\times K}{2} = \dfrac{2-K}{2} \Rightarrow 2-K$	
s^0	$\dfrac{(2-K)\times K - 2\times 0}{2-K} = K$	

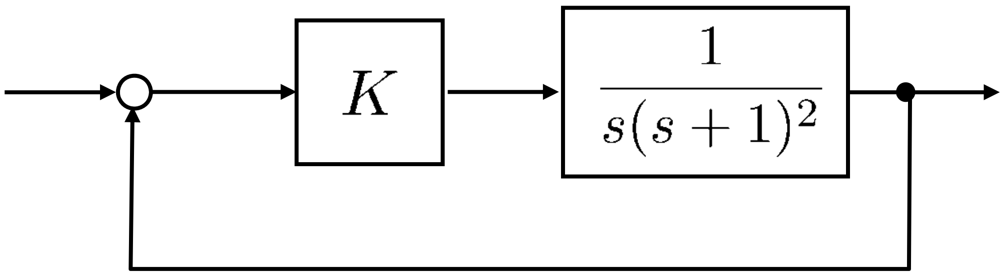
ある行に正の数をかけてもよい

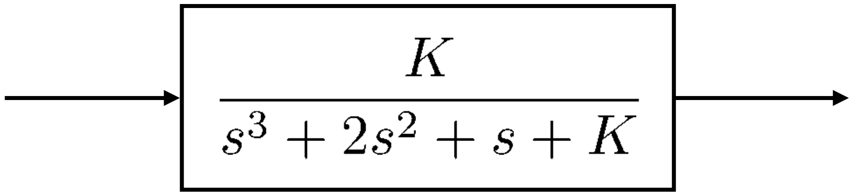
よって $2-K>0$ かつ $K>0$

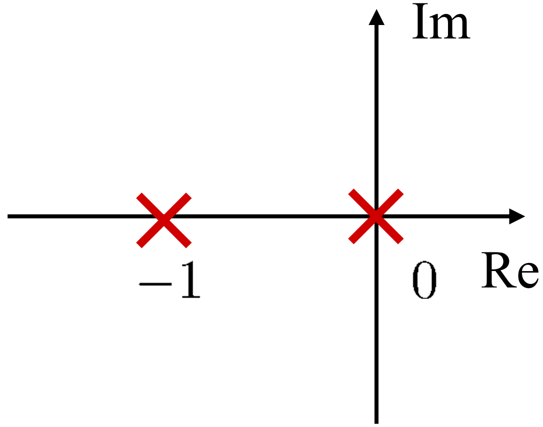
$\therefore 0 < K < 2$ ならば安定

制御対象の安定化

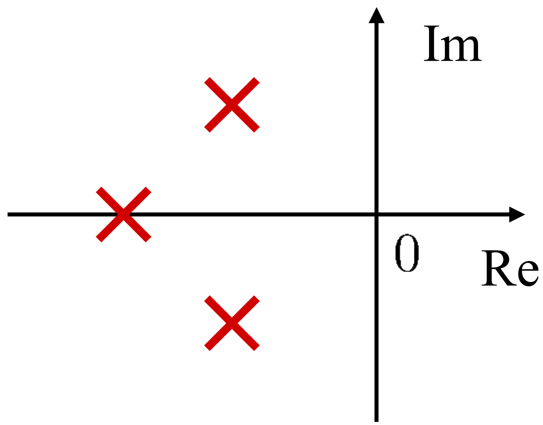
$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$







制御対象 $P(s)$ の極配置



閉ループ系の極配置 $(K=1)$

[例]

$$D_2(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

s^5	$+$	1	6	4
s^4	$+$	1	3	1
s^3	$+$	$3 = \dfrac{1\times 6 - 1\times 3}{1}$	$3 = \dfrac{1\times 4 - 1\times 1}{1}$	
s^2	$+$	$2 = \dfrac{3\times 3 - 1\times 3}{3}$	$1 = \dfrac{3\times 1 - 1\times 0}{3}$	
s^1	$+$	$1.5 = \dfrac{2\times 3 - 3\times 1}{2}$		
s^0	$+$	$1 = \dfrac{1.5\times 1 - 2\times 0}{1.5}$		

よって

安定

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

キーワード：　安定性, ラウスの安定判別法

学習目標：システムの安定性の概念を理解する。また, システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するラウスの安定判別法を習得する。