第 4 章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード： 開ループ伝達関数（一巡伝達関数），
定常偏差，偏差定数，l 型の制御系

学習目標： 定常偏差や偏差定数について理解する。
フィードバック制御系の型について理解する。

4 フィードバック制御系の特性
4.2 定常特性

目標値に対する定常偏差（外乱$d=0$）

[例 4.2]

制御対象：$P(s)=\dfrac{1}{s+1}$

コントローラ：$K(s)=K$

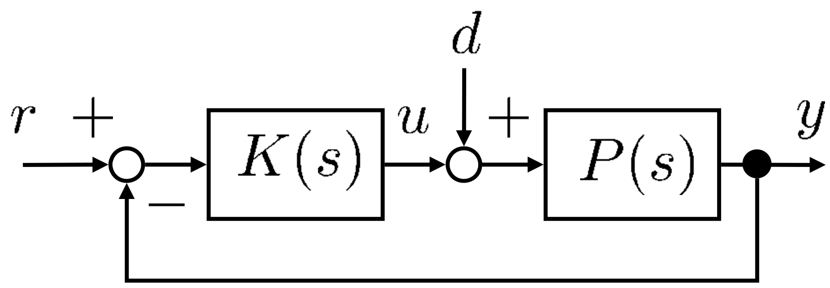
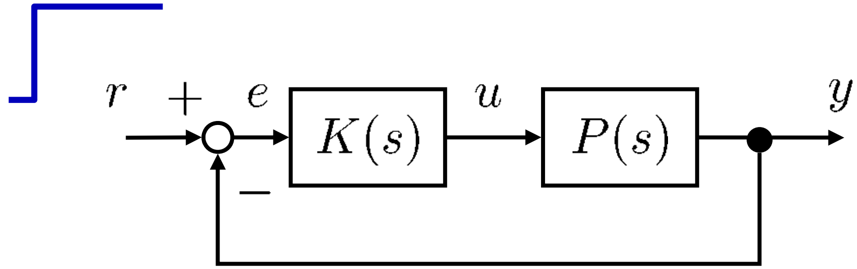


図4.1 （b）フィードバック制御系

$r\to y$ への閉ループ系の伝達関数

$$T(s)=\frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}=\frac{\dfrac{K}{s+1}}{1+\dfrac{K}{s+1}}=\frac{K}{s+K+1}$$

$$y(s) = T(s)r(s) \qquad \left[T(s) = \frac{K}{s+K+1},\ r(s) = \frac{1}{s}\ \text{(ステップ応答)} \right]$$



$$y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{K+1}{s+(K+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K}{1+K} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(K+1)} \right)$$

$$y(t) = \frac{K}{1+K} \left(1 - e^{-(K+1)t} \right)$$

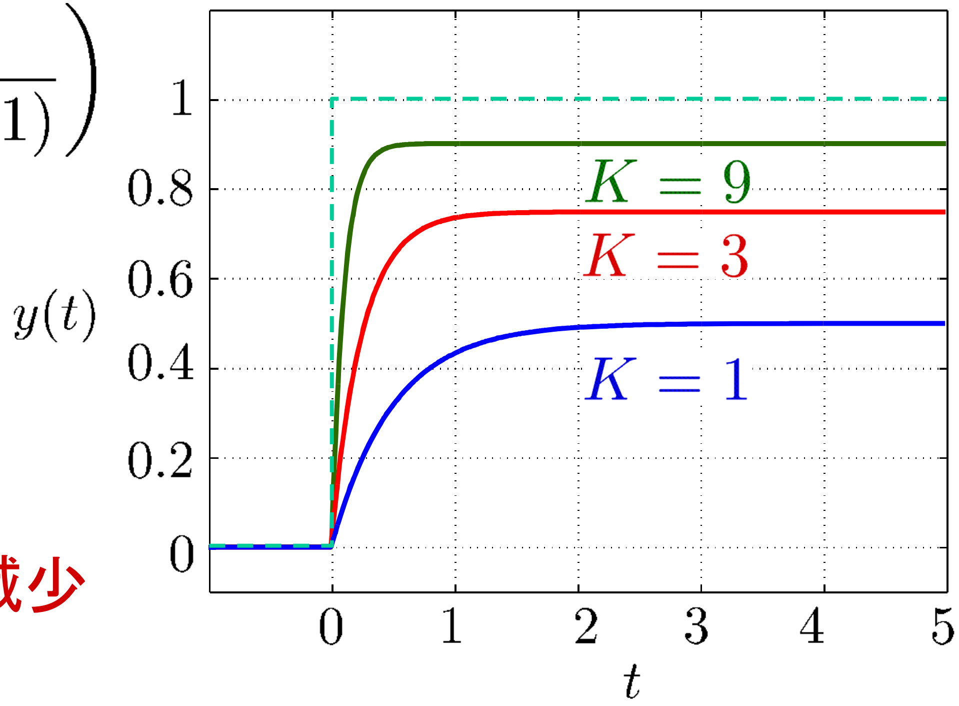
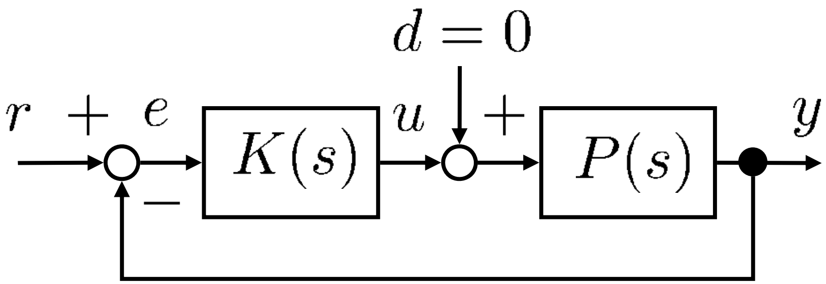


図4.3 ステップ応答例

ゲイン:大 ➡ (定常)偏差:減少

偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$



一巡伝達関数　$L(s) = P(s)K(s)$
（開ループ伝達関数）

$$e(s) = r(s) - L(s)e(s)$$

- $e(s) = r(s) - y(s)$
- $y(s) = L(s)e(s)$

$$(1 + L(s))\, e(s) = r(s)$$

$$e(s) = \underline{\frac{1}{1+L(s)}}\, r(s)$$

（感度関数）

定常偏差

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t\to\infty} e(t) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot e(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+L(s)} r(s) \end{aligned}$$

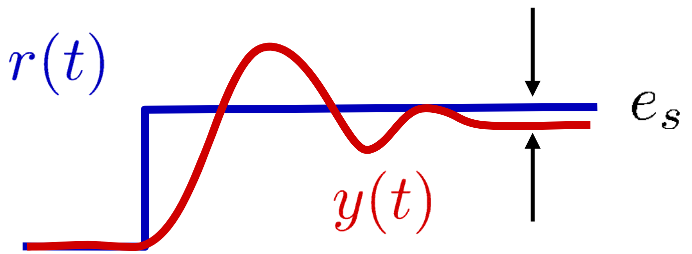
最終値定理(p. 190 付録(L7))

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

[A] ステップ入力

$$r(t) = 1 \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s} \right)$$

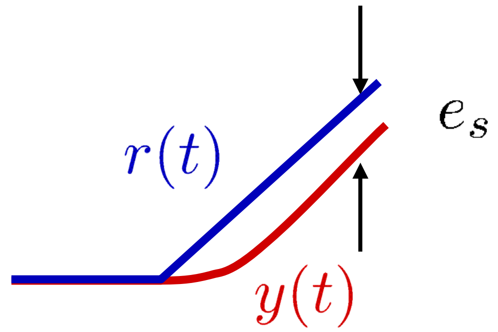


$$e_s = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} L(s)}$$ 定常位置偏差

$$K_p = \lim_{s \to 0} L(s) = L(0)$$ 位置偏差定数

[B] ランプ入力

$$r(t) = t \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s^2} \right)$$



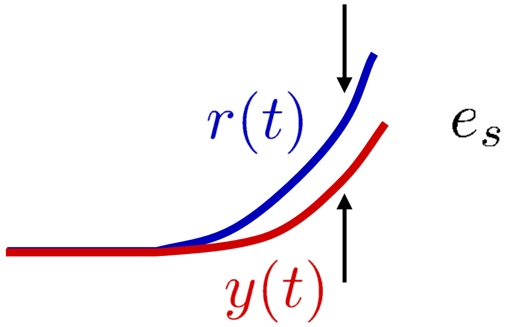
$$e_s = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)}$$

定常速度偏差

$$K_v = \lim_{s \to 0} sL(s)$$ 速度偏差定数

[C] 一定加速度入力

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s^3} \right)$$



$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$$ 定常加速度偏差

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 L(s)$$ 加速度偏差定数

偏差定数

$K_p(= L(0)),\ K_v,\ K_a$: 大 ➡ 定常偏差 : 小

(一般に)一巡伝達関数 $L(s) = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{\underline{s^l}(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)}$

$\underline{l = 0 \text{ のとき:}}$

$L(s)$ は積分器 $\dfrac{1}{s}$ を持たない

$$r(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad e_s = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s\to 0} L(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

$$r(t) = t \quad \Rightarrow \quad e_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$l=1$ のとき:

$L(s)$ は積分器 $\dfrac{1}{s}$ を 1 個含む

$$r(t)=1 \quad \Rightarrow \quad e_s=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}L(s)}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

$$r(t)=t \quad \Rightarrow \quad e_s=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)}=\frac{1}{K_v}$$

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2L(s)}=\frac{1}{0}=\infty$$

$l = 2$ のとき:

$L(s)$ は積分器 $\dfrac{1}{s}$ を 2 個含む

$$r(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} L(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$r(t) = t \quad \Rightarrow \quad e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{K_a}$$

定常偏差をゼロにするためには

l 型(タイプ l)の制御系: $L(s)$ が l 個の積分器 $\left(\frac{1}{s}\right)^l$ をもつ

$r(t) = 1$ のとき $l \geq 1$

$r(t) = t$ のとき $l \geq 2$

$r(t) = \frac{t^2}{2}$ のとき $l \geq 3$

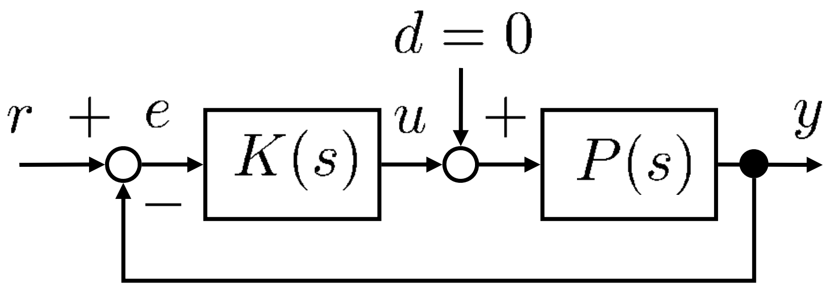
$\Rightarrow$ (係数の値に関係なく)
常に, 定常偏差 $= 0$

表4.1 制御系の型と定常偏差

	制御系の型	$r(t) = 1$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
$l = 0$	0 型	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
$l = 1$	1 型	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
$l = 2$	2 型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

[例 4.3]

$$P(s)=\frac{1}{s},\quad K(s)=\frac{K_0}{s+1}\quad (K_0>0)$$



$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$

位置偏差定数

$$K_p=L(0)=\infty$$

定常位置偏差

$$e_s=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}$$
$$=\frac{1}{1+L(0)}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

(K_0 の値に関係なく)

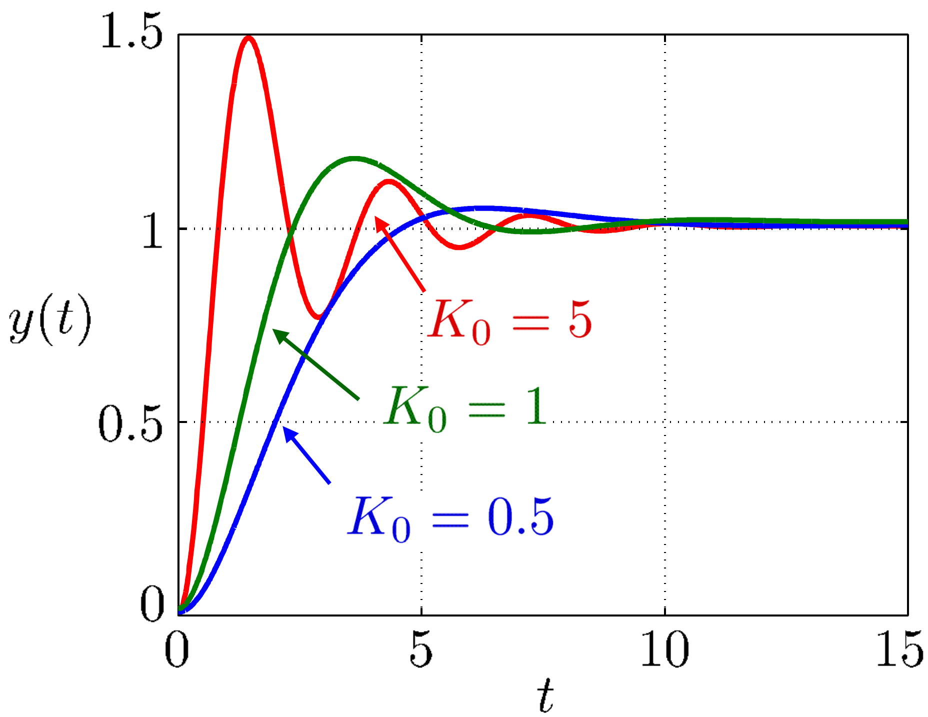
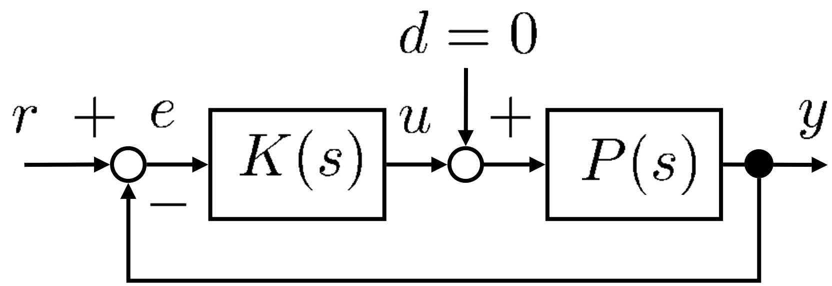


図4.4 (a) ステップ応答

$$L(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$$

速度偏差定数

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \cdot L(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K_0}{\cancel{s}(s+1)} = K_0$$



定常速度偏差

$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_0}$$

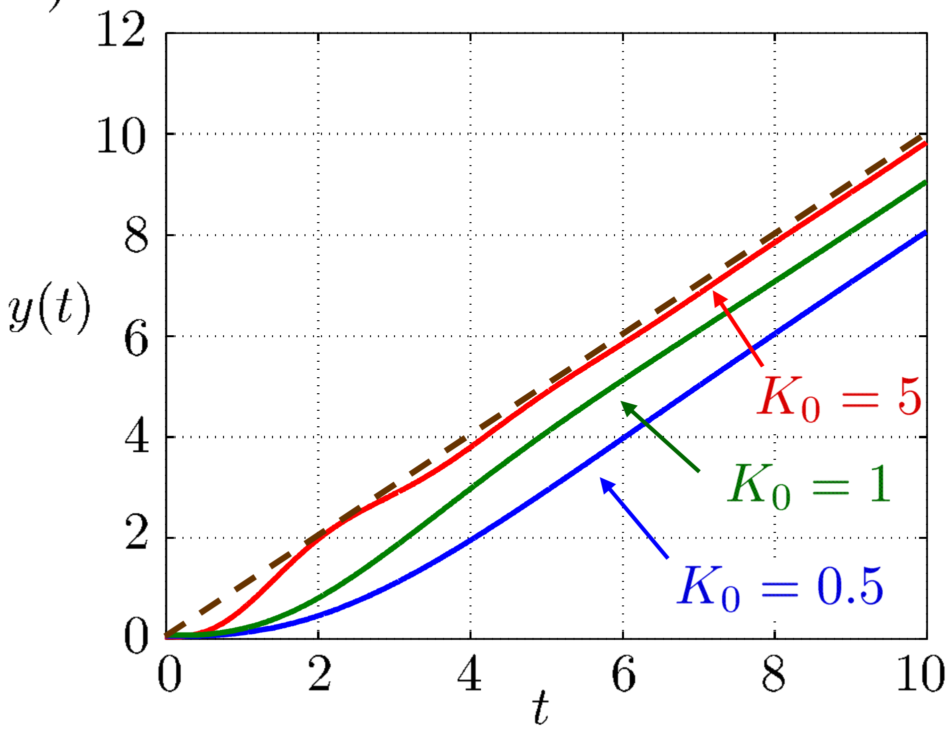


図4.4（b）ランプ入力応答

加速度偏差定数

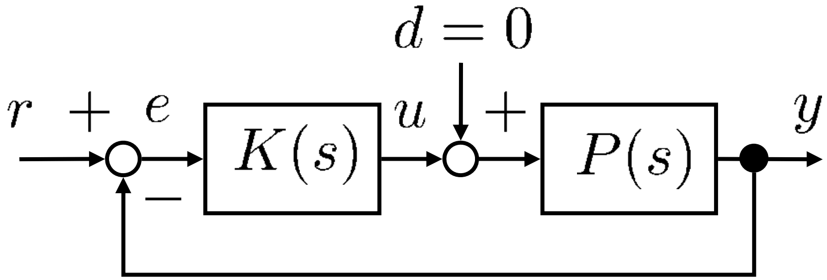
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot L(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s^2 \cdot \frac{K_0}{s(s+1)} = 0$$

定常加速度偏差

$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \infty$$

[例 4.3]（再考）



$$P(s)=\frac{1}{s},\quad K(s)=\frac{K_0}{s+1}\quad (K_0>0)$$

$$r(s)=\frac{1}{s}$$

$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{\underline{s}(s+1)}$$

1 型

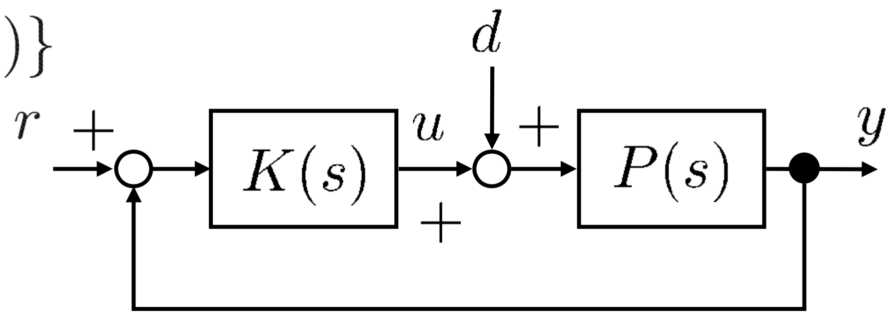
K_0 の値に関係なく定常位置偏差 $=0$

$$L(0)=\infty\quad\left(\Leftrightarrow S(0)=\frac{1}{1+L(0)}=0\right)$$

目標値の周波数成分 $(\omega=0)$ に対して, ループゲインが無限大

外乱に対する定常偏差（目標値 $r=0$ ）

$$y(s) = P(s)\left\{d(s) + K(s)\underbrace{(r(s)}_{=0} - y(s))\right\}$$



$$(1+P(s)K(s))y(s) = P(s)d(s)$$

$$y(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$

ステップ外乱　$d(s) = \frac{1}{s}$

定常偏差　$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sy(s) = \frac{P(0)}{1+P(0)K(0)}$

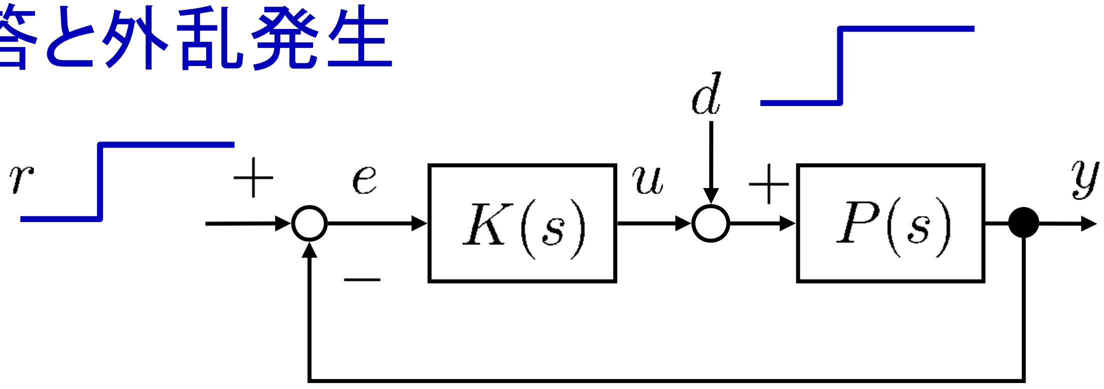
$K(0)=\infty$ または $P(0)=0$ ならば，定常偏差 $=0$

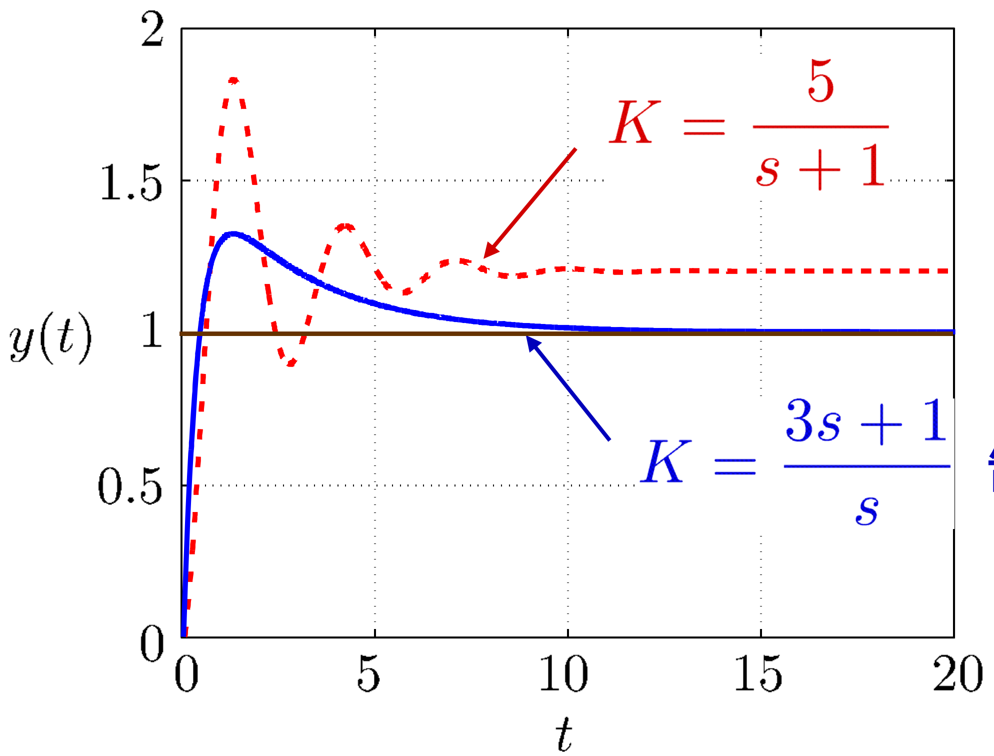
(実質的には)コントローラが積分器をもつことが重要

外乱の周波数成分（ $\omega = 0$ ）に対して, コントローラのゲインが無限大

[例 4.4] 目標値応答と外乱発生

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad d(s) = \frac{1}{s}$$





ステップ外乱が同時に
加わると定常偏差

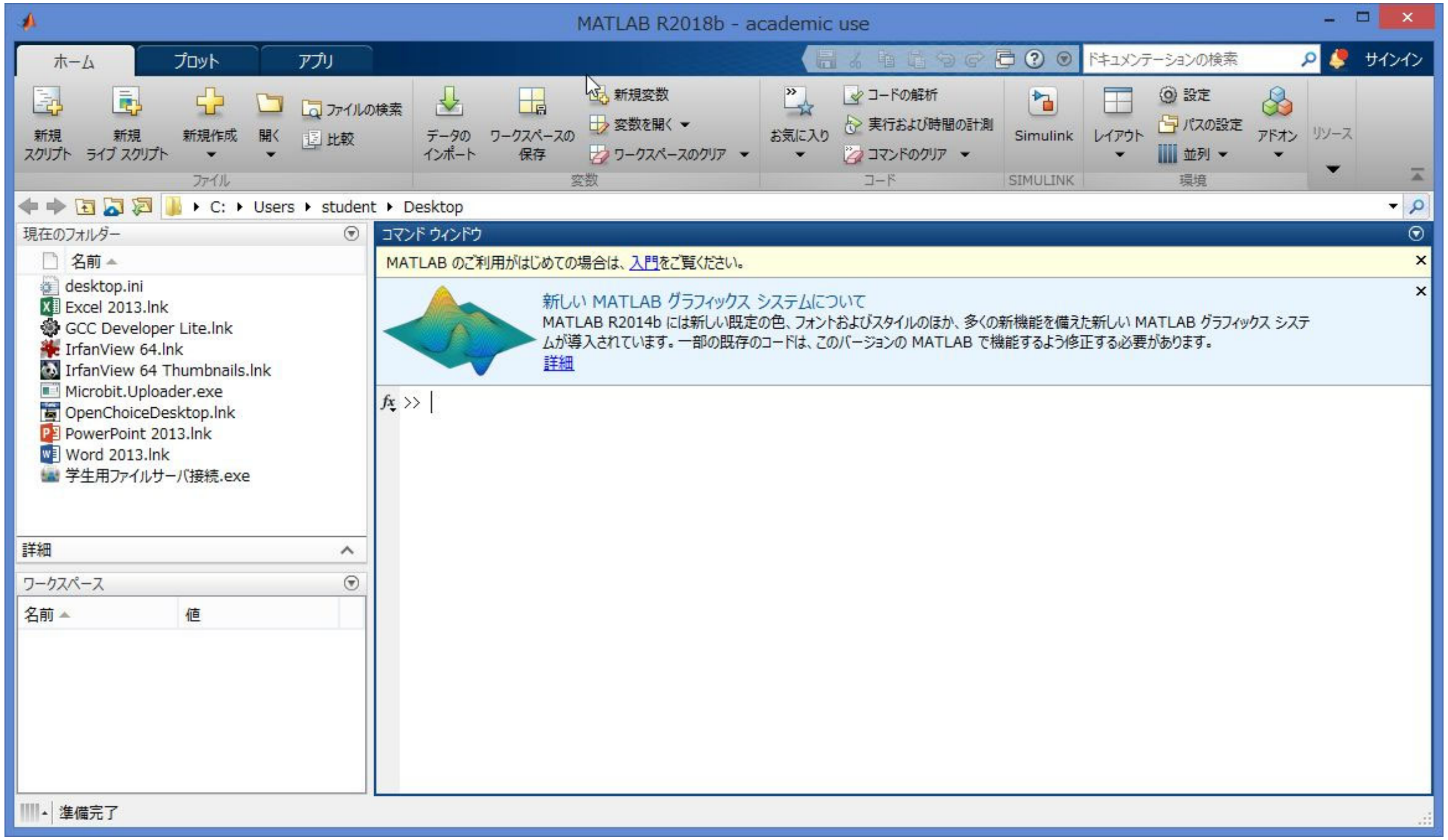
制御器に積分器

図4.5 ステップ外乱が存在するときの目標値応答

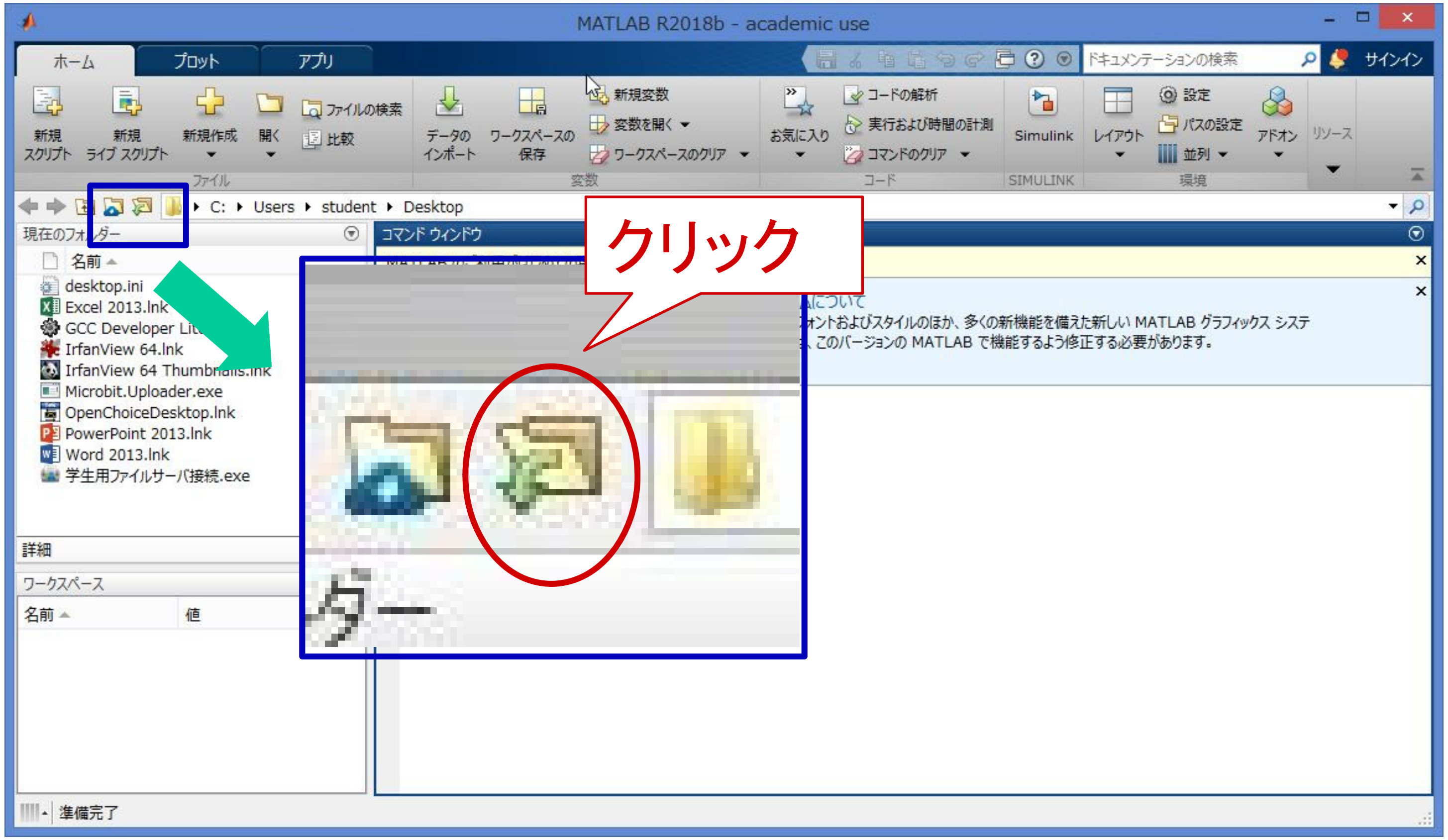
MATLAB演習

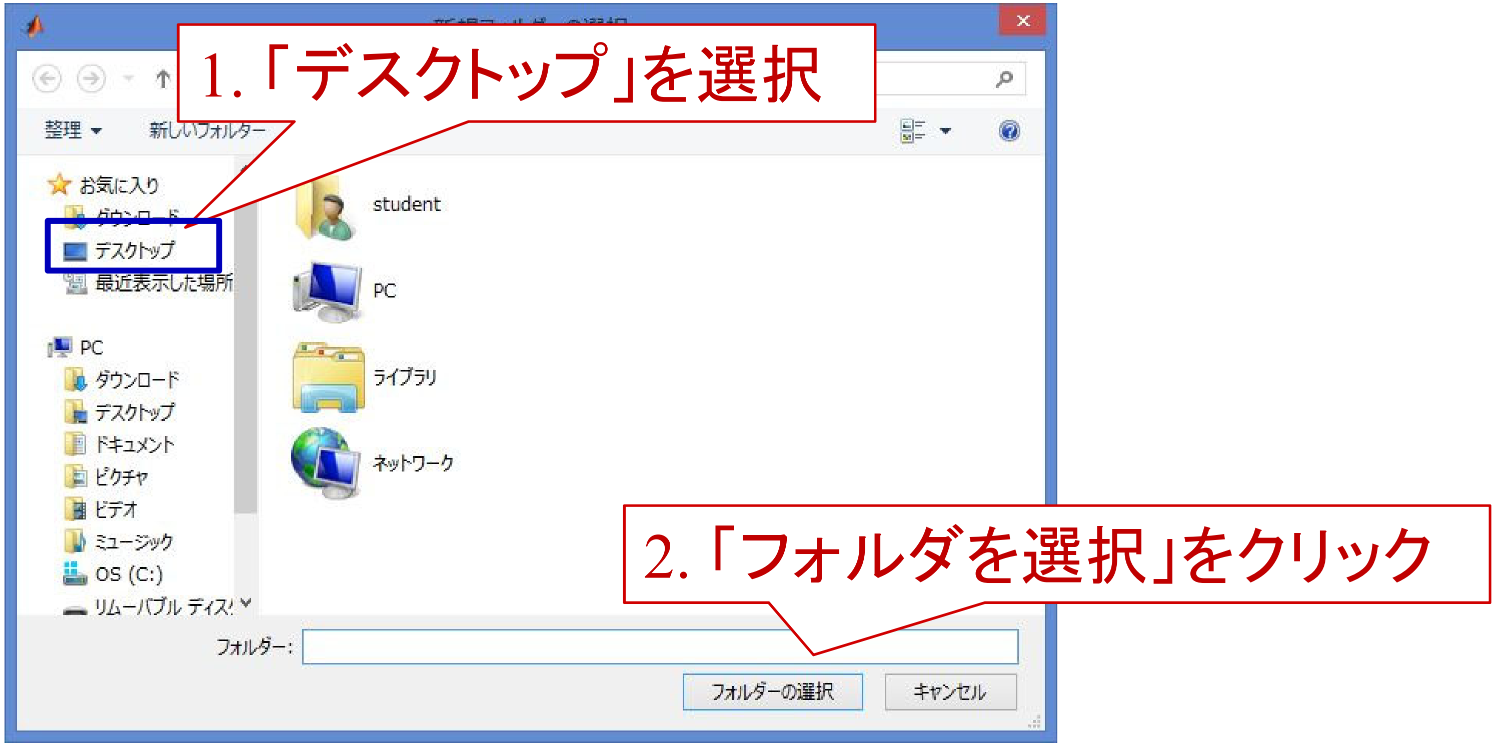
(1) MATLABの起動

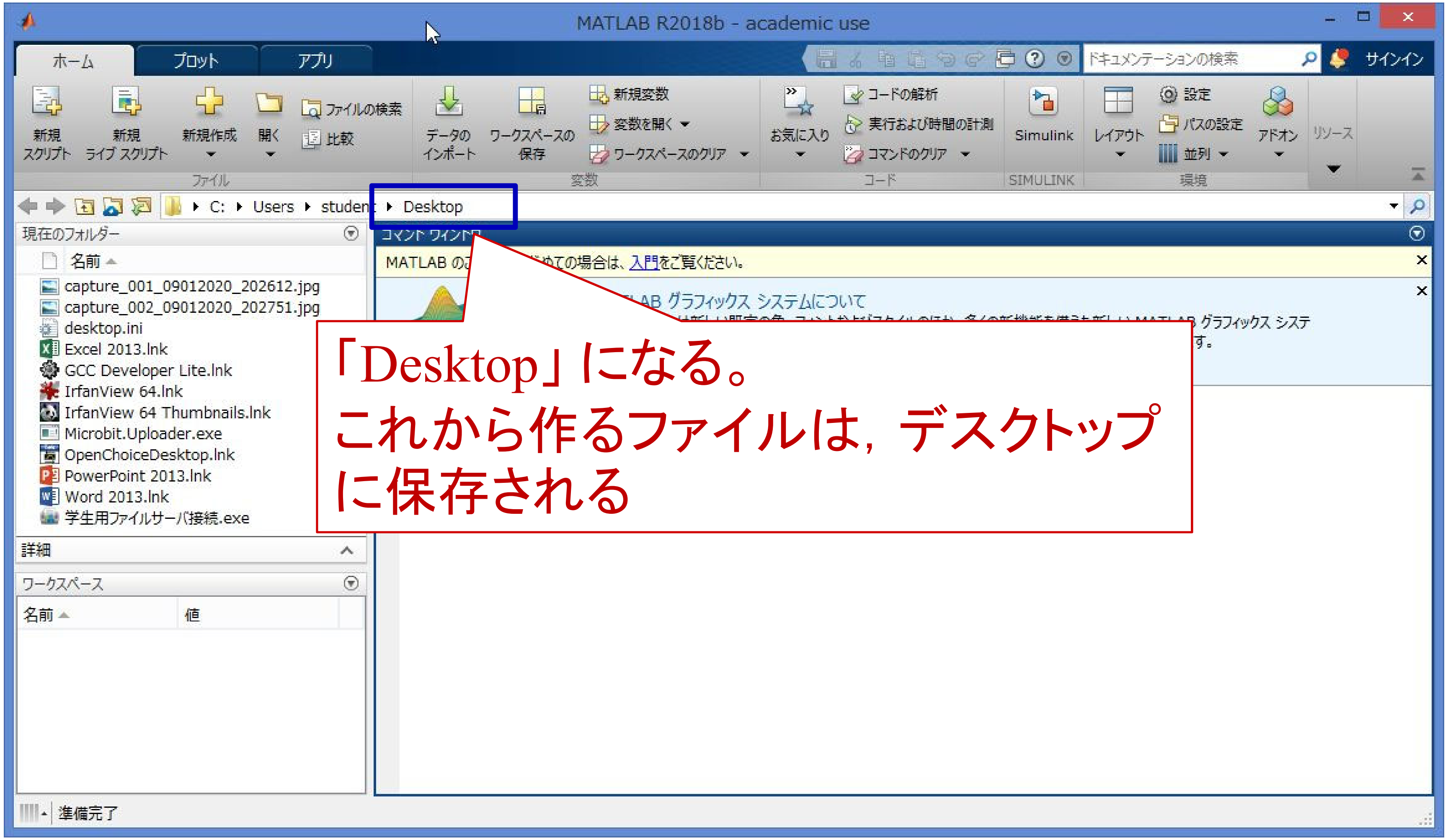
をクリック

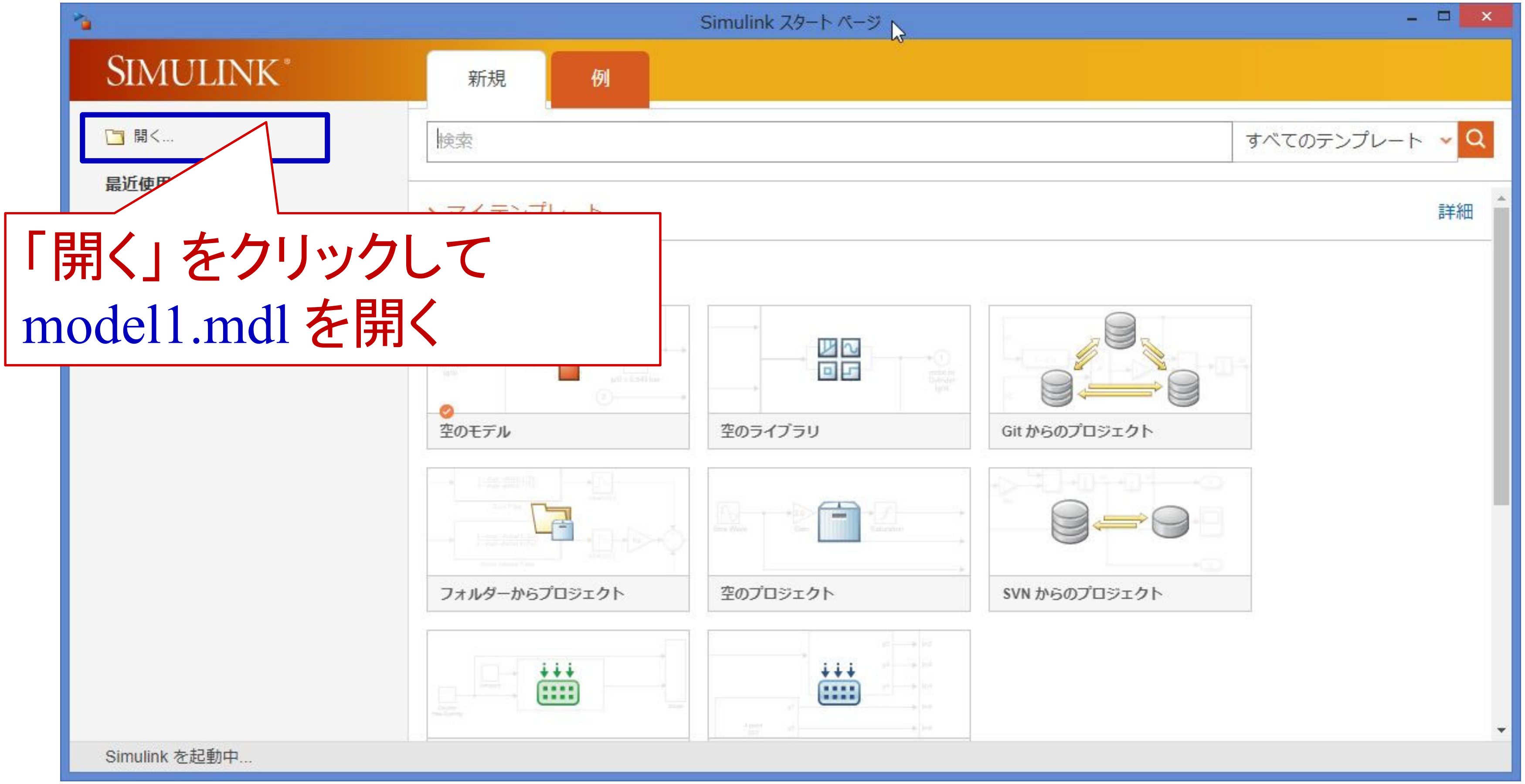


(2) カレントフォルダの設定

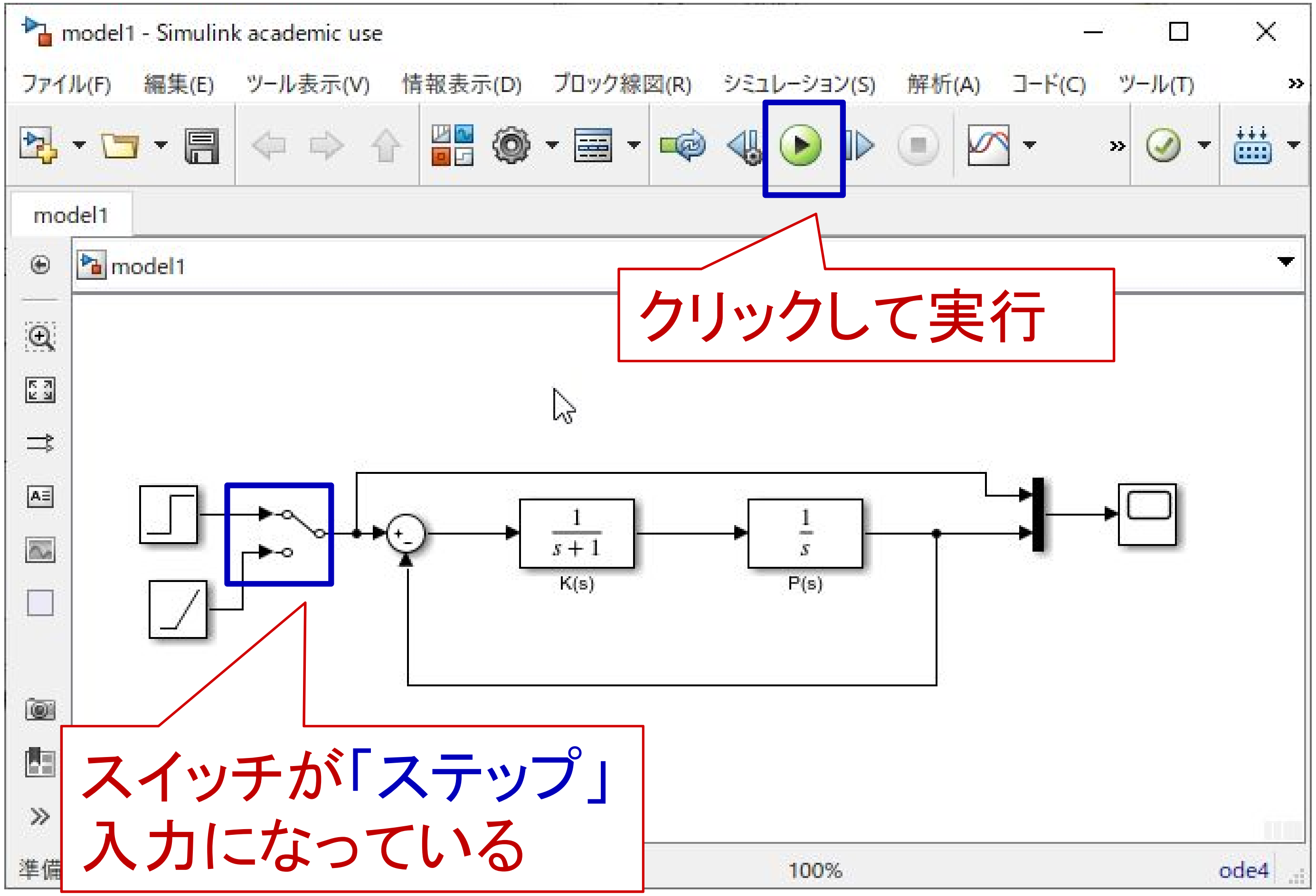


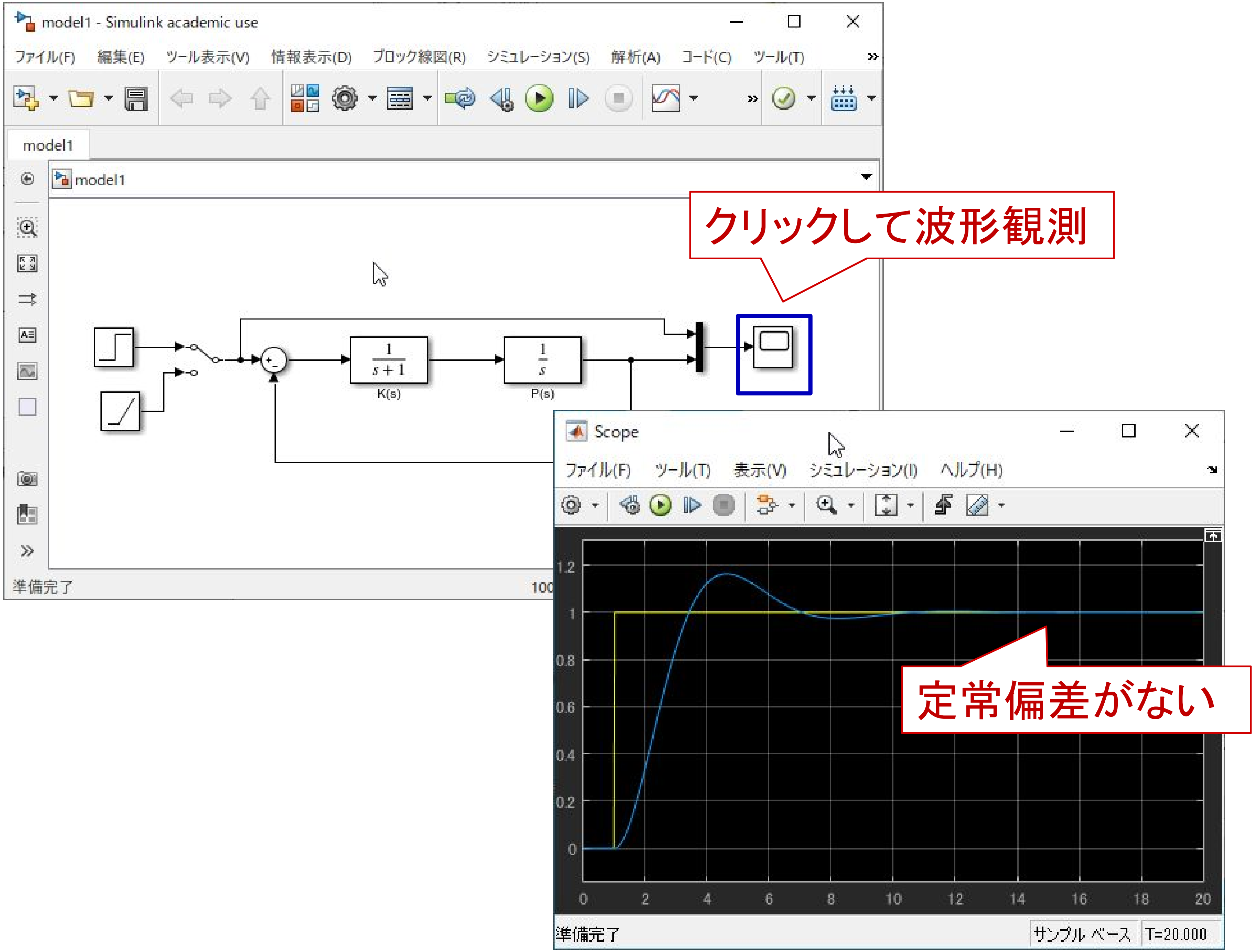

1.「デスクトップ」を選択
整理
新しいフォルダー
お気に入り
ダウンロード
デスクトップ
最近表示した場所
PC
ダウンロード
デスクトップ
ドキュメント
ピクチャ
ビデオ
ミュージック
OS (C:)
リムーバブル ディス
student
PC
ライブラリ
ネットワーク
2.「フォルダを選択」をクリック
フォルダー:
フォルダーの選択
キャンセル

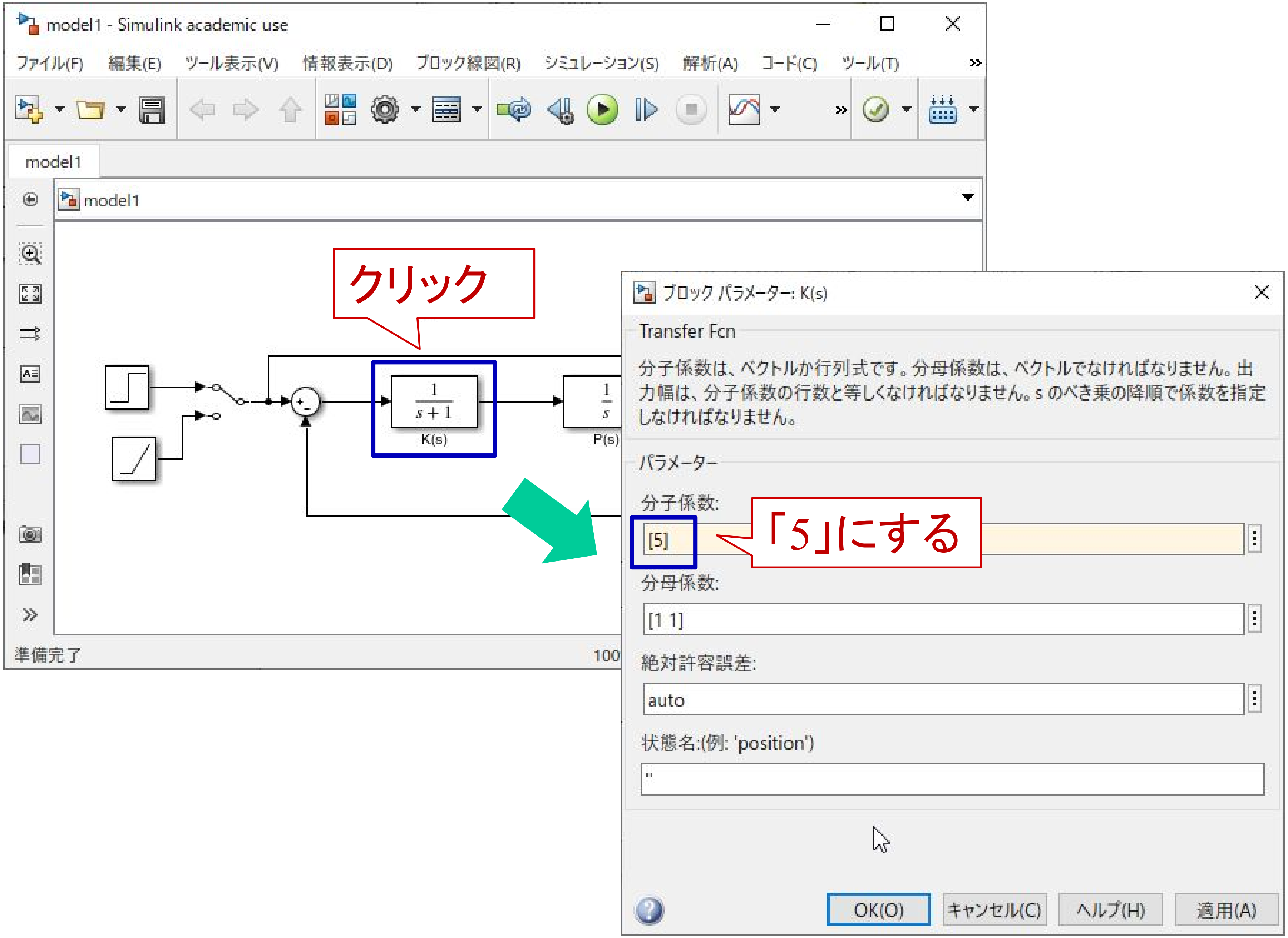

MATLAB R2018b - academic use
ホーム
プロット
アプリ
C: ▸ Users ▸ student ▸ Desktop
現在のフォルダー
capture_001_09012020_202612.jpg
capture_002_09012020_202751.jpg
desktop.ini
Excel 2013.lnk
GCC Developer Lite.lnk
IrfanView 64.lnk
IrfanView 64 Thumbnails.lnk
Microbit.Uploader.exe
OpenChoiceDesktop.lnk
PowerPoint 2013.lnk
Word 2013.lnk
学生用ファイルサーバ接続.exe
ワークスペース
準備完了
「Desktop」になる。
これから作るファイルは，デスクトップに保存される


Simulink スタート ページ
SIMULINK
新規
例
開く...
最近使用
「開く」をクリックして
model1.mdl を開く
検索
すべてのテンプレート
詳細
空のモデル
空のライブラリ
Git からのプロジェクト
フォルダーからプロジェクト
空のプロジェクト
SVN からのプロジェクト
Simulink を起動中...

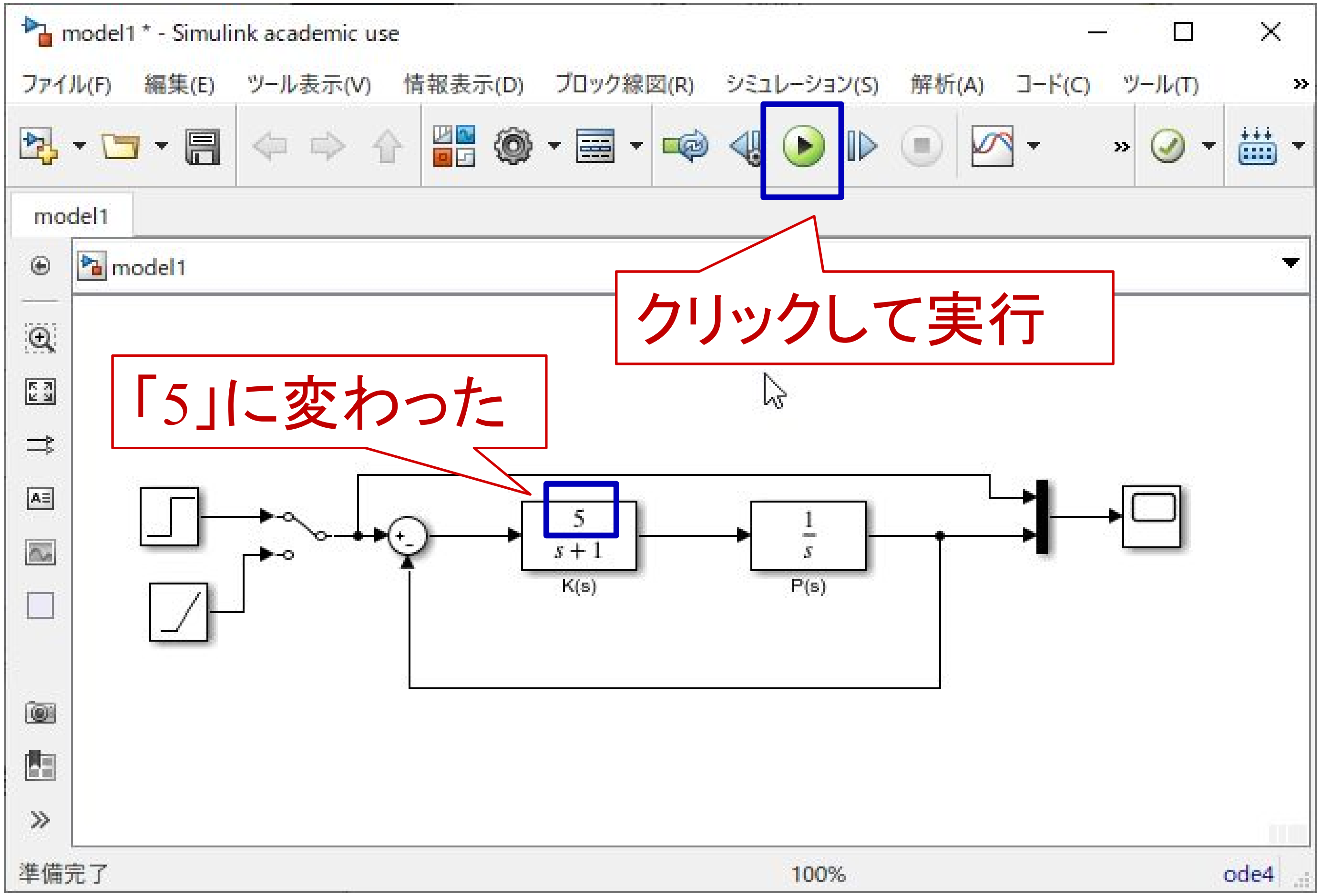
[例 4.3]

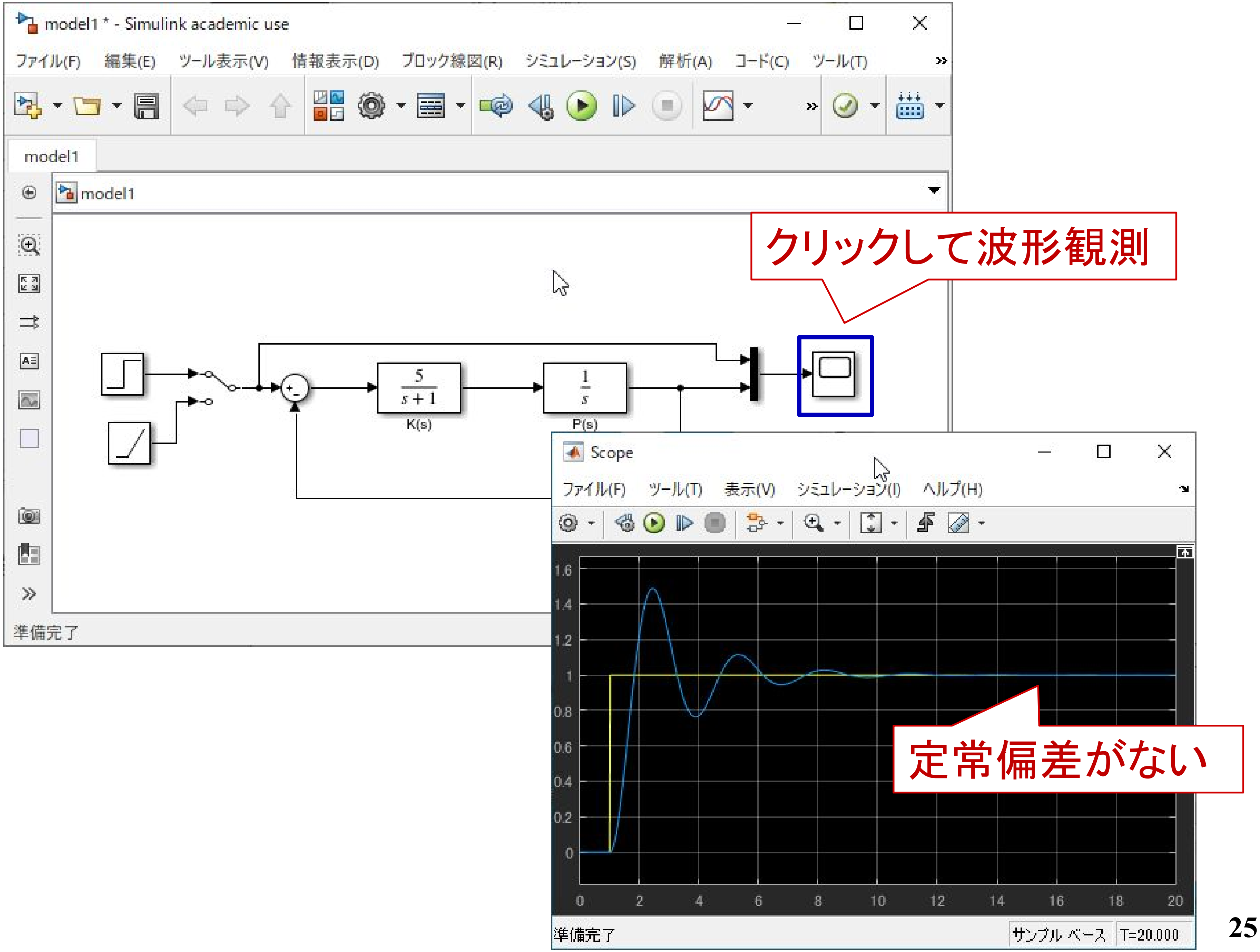

model1 - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリックして実行
K(s)
P(s)
スイッチが「ステップ」入力になっている
100%
ode4

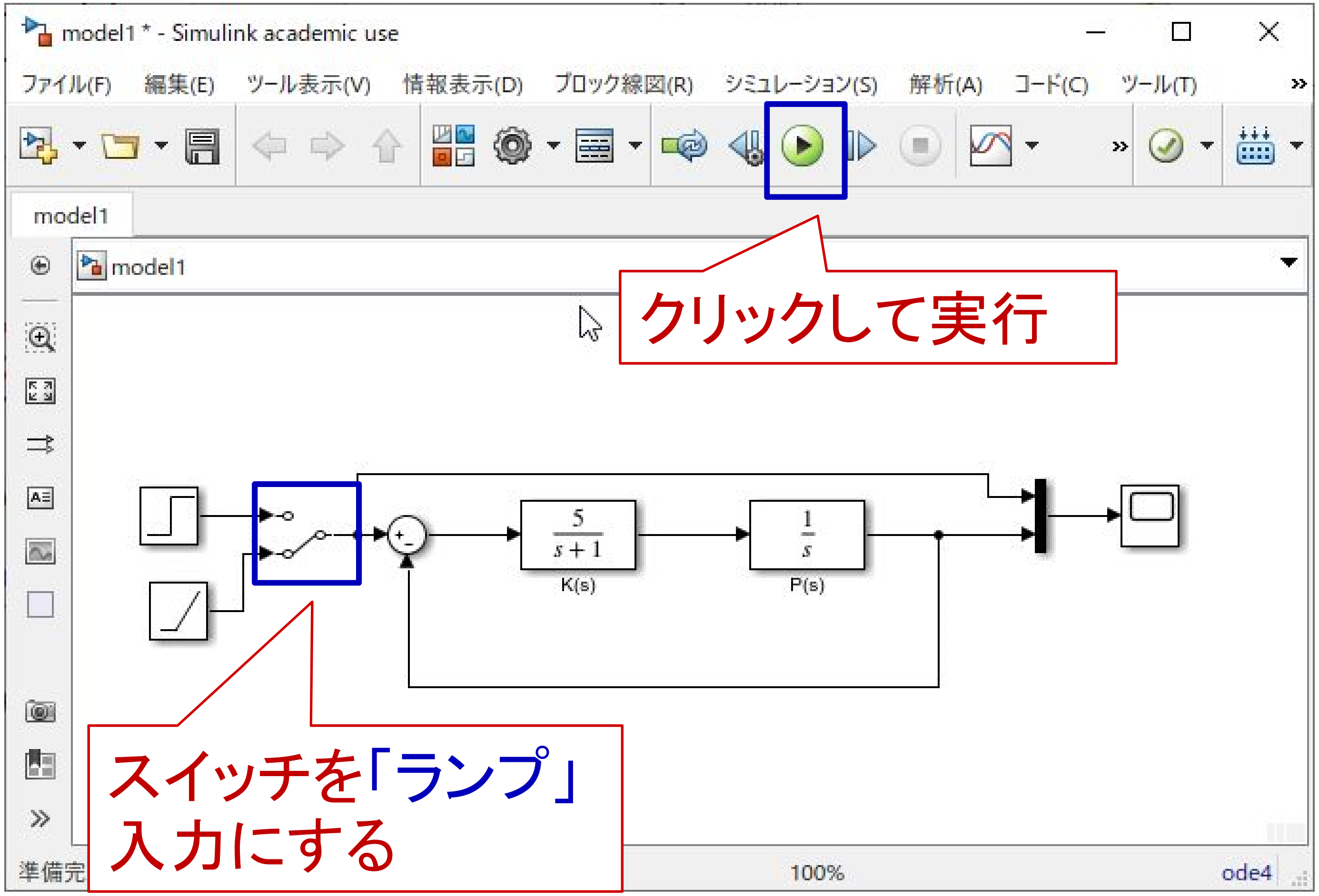

model1 - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリックして波形観測
K(s)
P(s)
準備完了
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
定常偏差がない
サンプル ベース
T=20.000

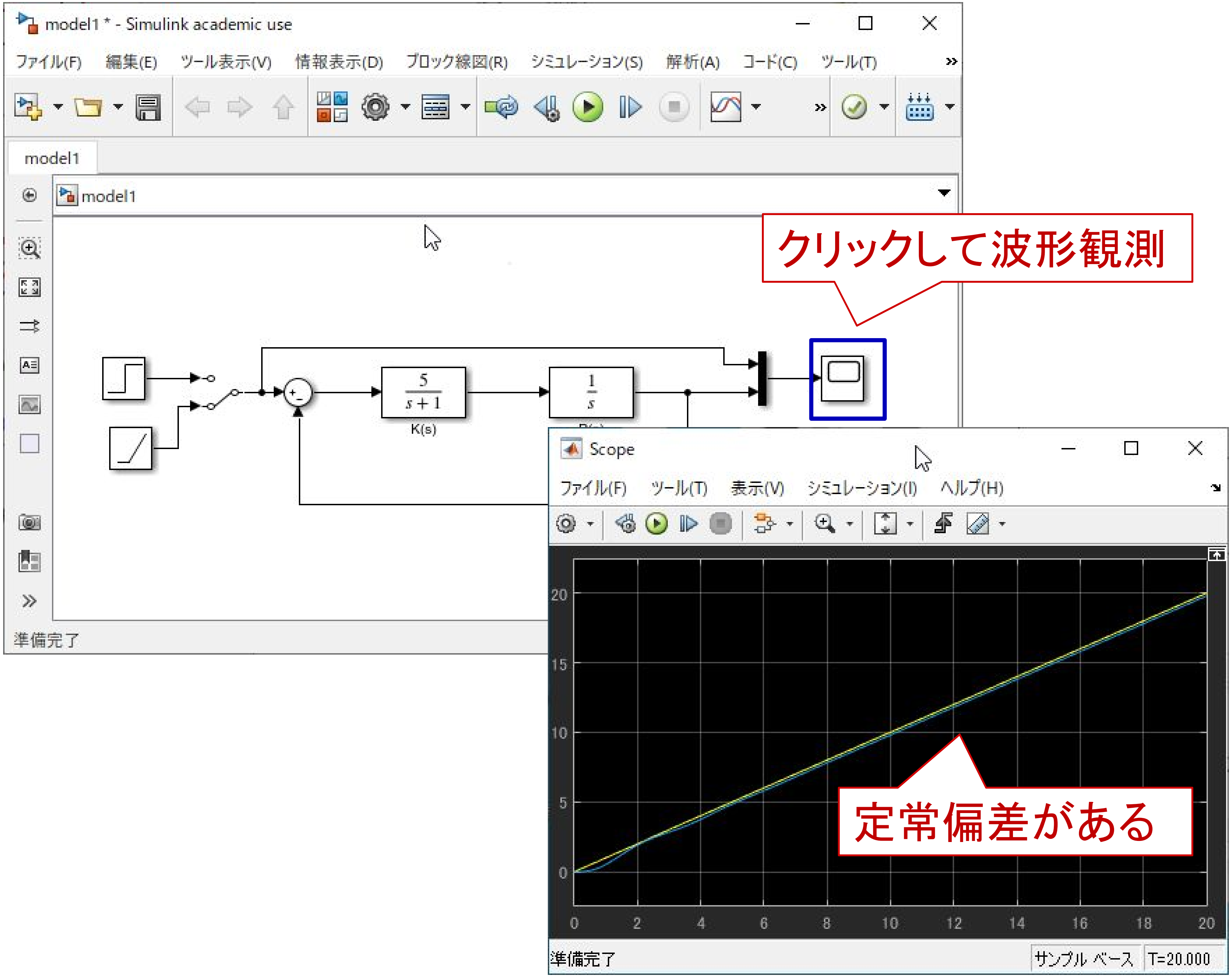


model1 - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリック
K(s)
P(s)
準備完了
ブロック パラメーター: K(s)
Transfer Fcn
分子係数は、ベクトルか行列式です。分母係数は、ベクトルでなければなりません。出力幅は、分子係数の行数と等しくなければなりません。s のべき乗の降順で係数を指定しなければなりません。
パラメーター
分子係数:
[5]
「5」にする
分母係数:
[1 1]
絶対許容誤差:
auto
状態名:(例: 'position')
''
OK(O)
キャンセル(C)
ヘルプ(H)
適用(A)

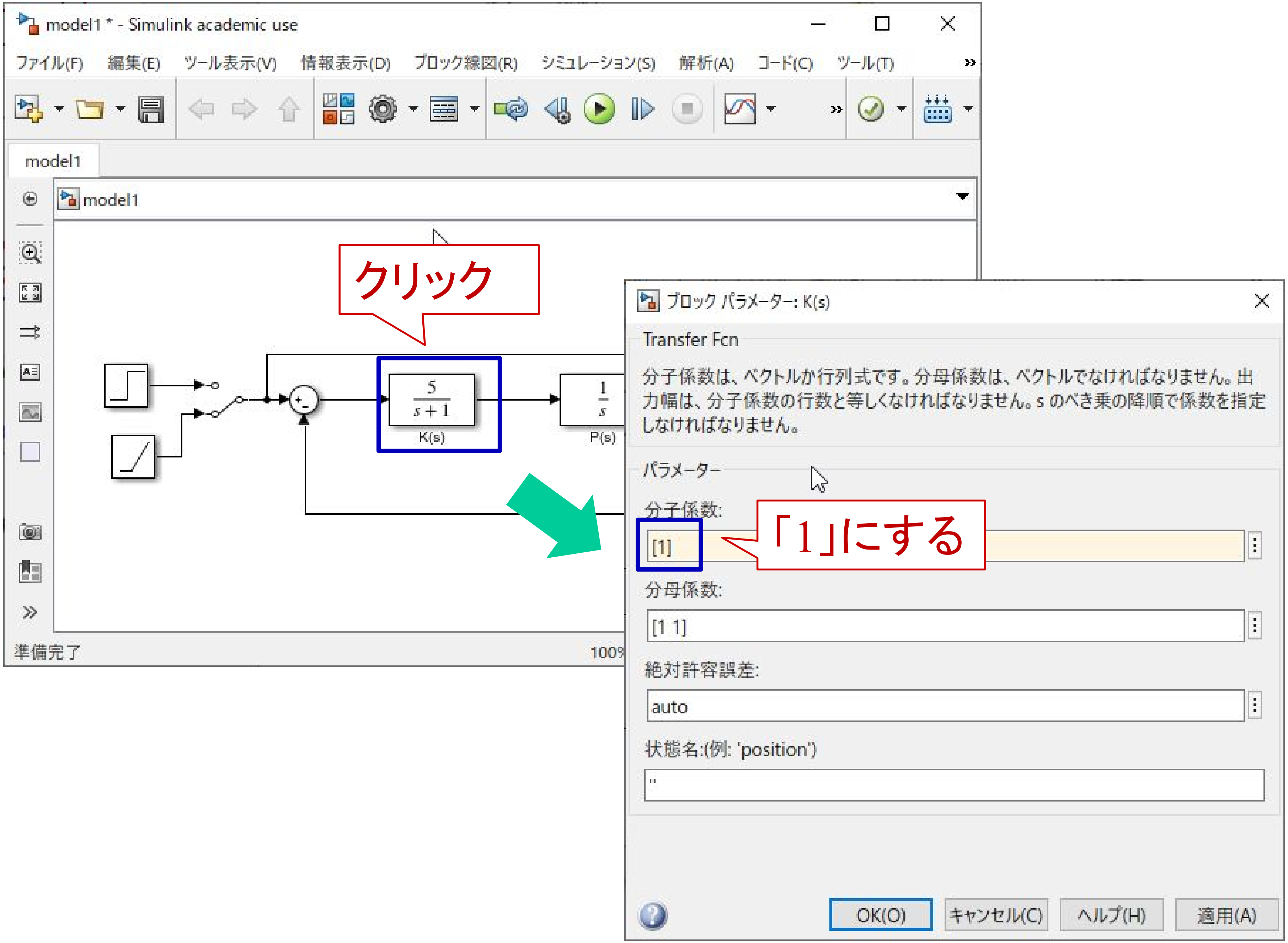

model1 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
model1
クリックして実行
「5」に変わった
5
s + 1
K(s)
1
s
P(s)
準備完了
100%
ode4

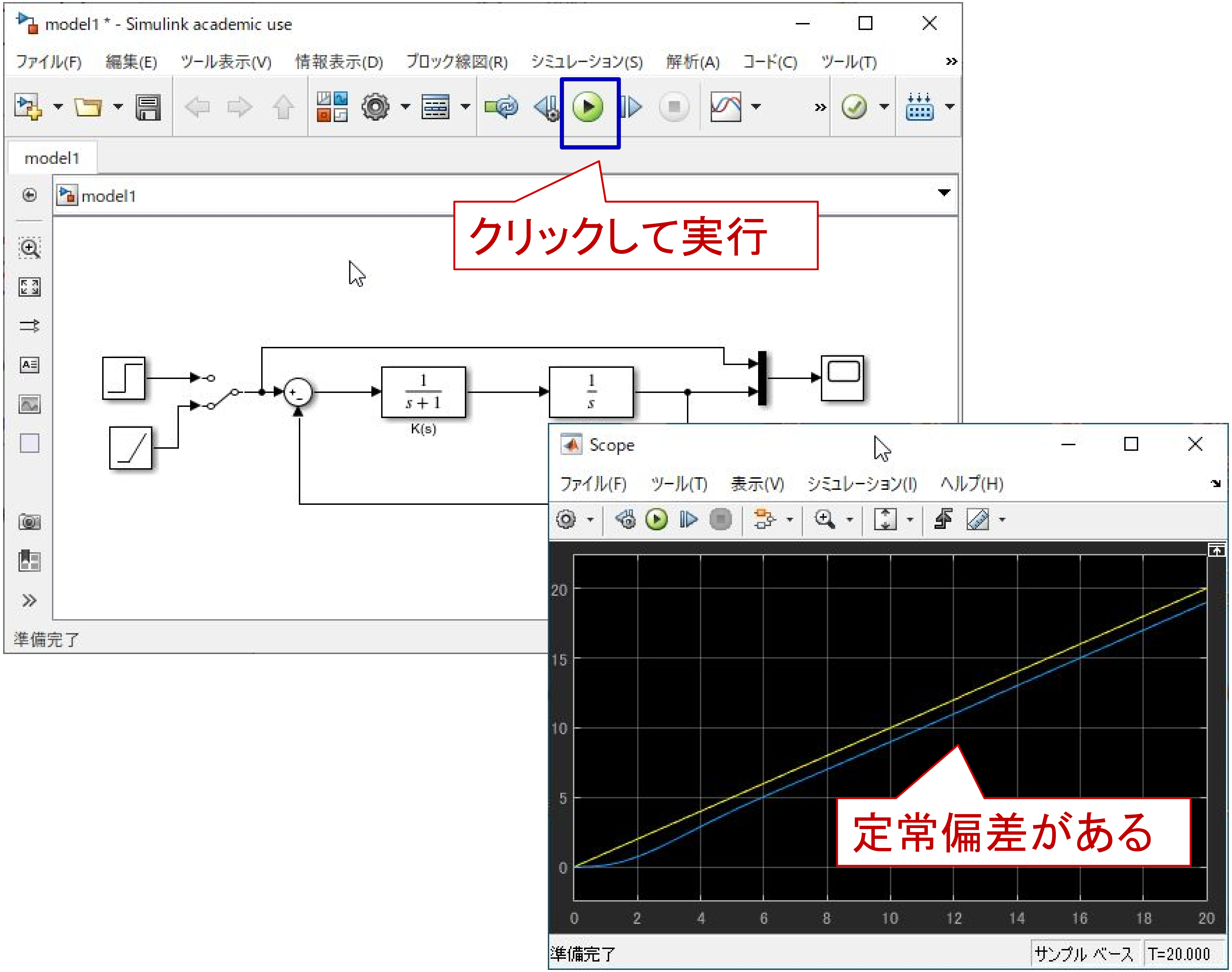

model1 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリックして波形観測
K(s)
P(s)
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
定常偏差がない
準備完了
サンプル ベース
T=20.000


model1 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリックして実行
$\frac{5}{s+1}$
K(s)
$\frac{1}{s}$
P(s)
スイッチを「ランプ」
入力にする
準備完
100%
ode4



model1 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリックして波形観測
K(s)
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
定常偏差がある
準備完了
サンプル ベース T=20.000

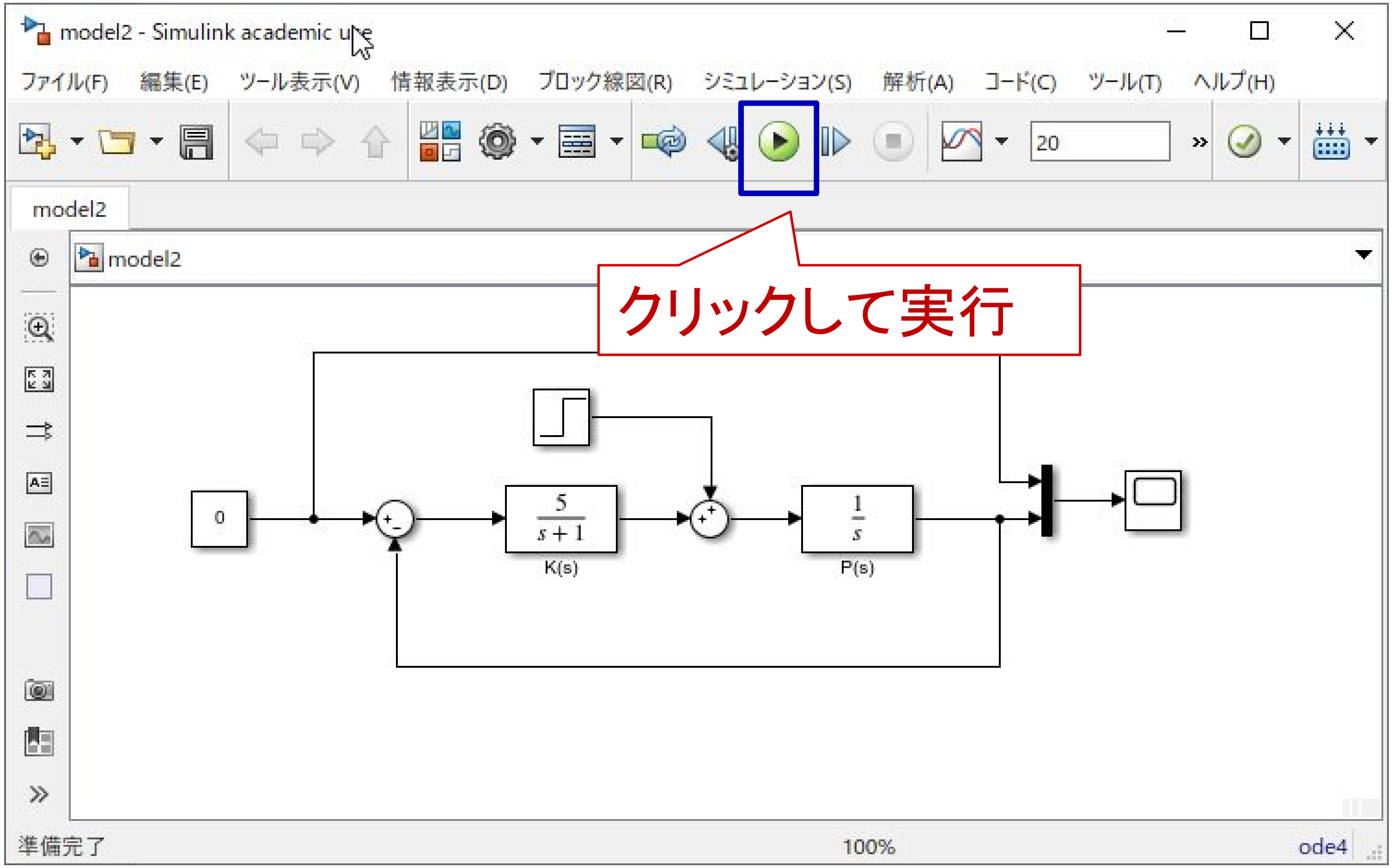

model1 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリック
K(s)
P(s)
準備完了
ブロック パラメーター: K(s)
Transfer Fcn
分子係数は、ベクトルか行列式です。分母係数は、ベクトルでなければなりません。出力幅は、分子係数の行数と等しくなければなりません。s のべき乗の降順で係数を指定しなければなりません。
パラメーター
分子係数:
[1]
「1」にする
分母係数:
[1 1]
絶対許容誤差:
auto
状態名:(例: 'position')
''
OK(O)
キャンセル(C)
ヘルプ(H)
適用(A)

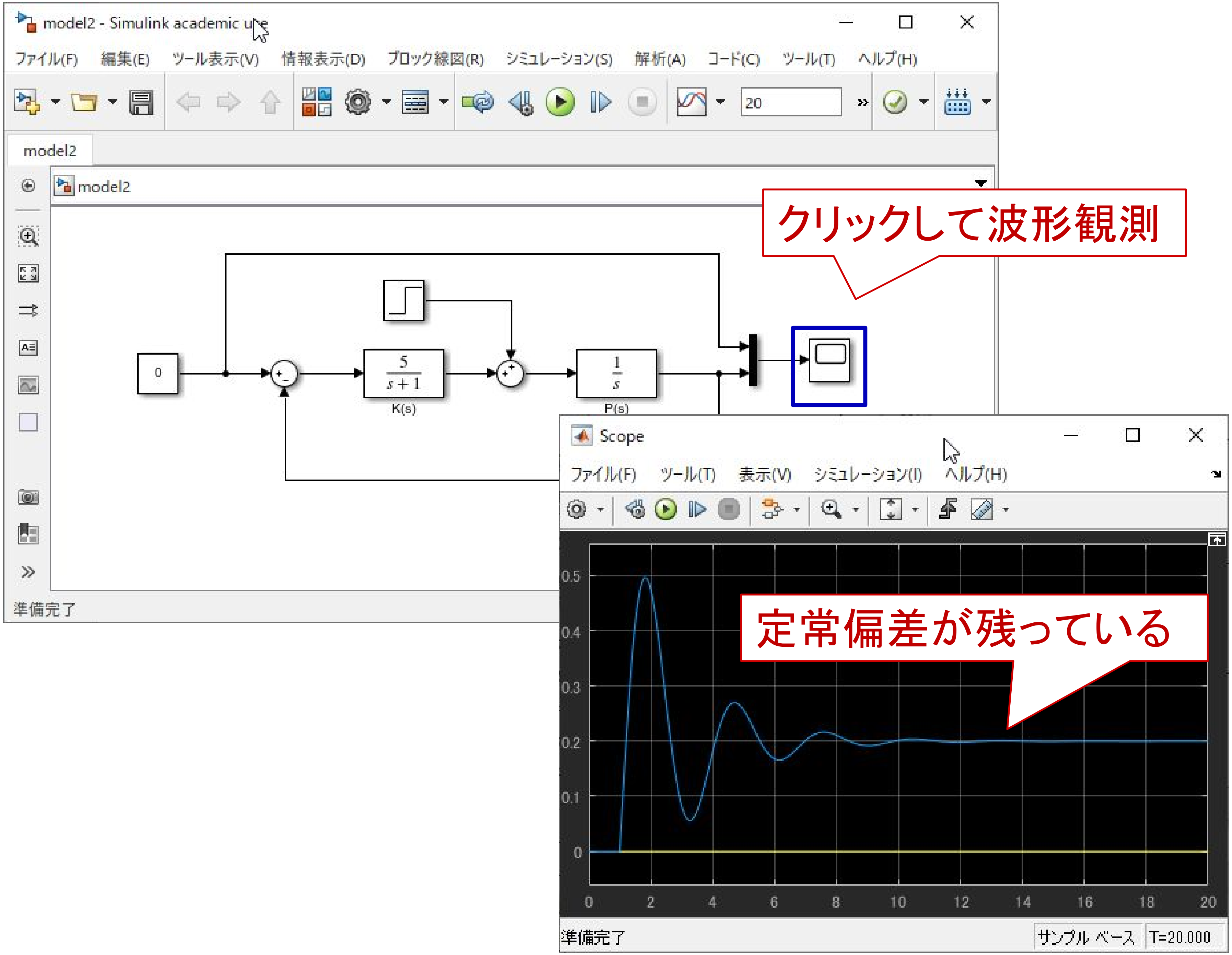


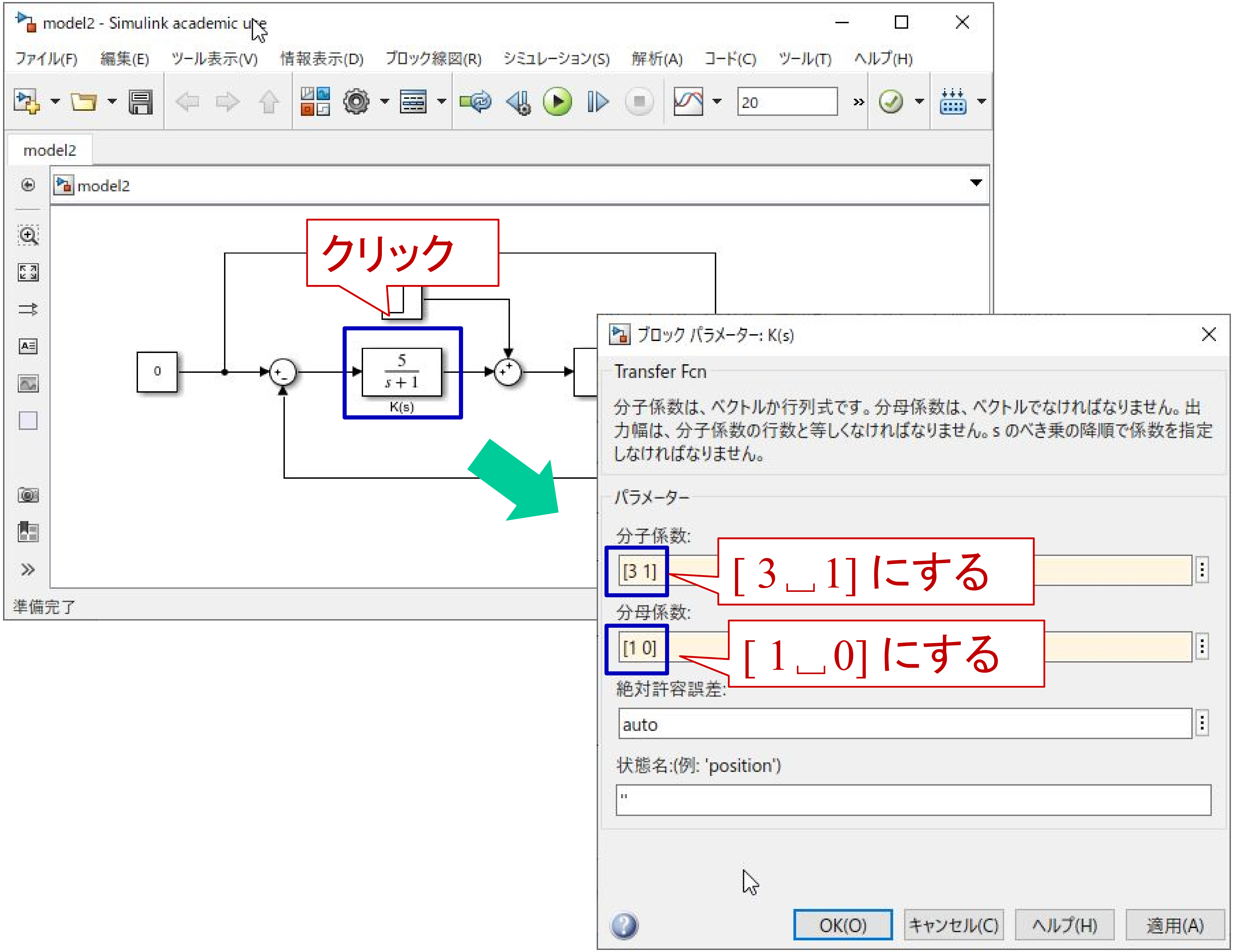
model1 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T)
model1
クリックして実行
1
s + 1
K(s)
1
s
準備完了
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
定常偏差がある
0
5
10
15
20
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
サンプル ベース
T=20.000

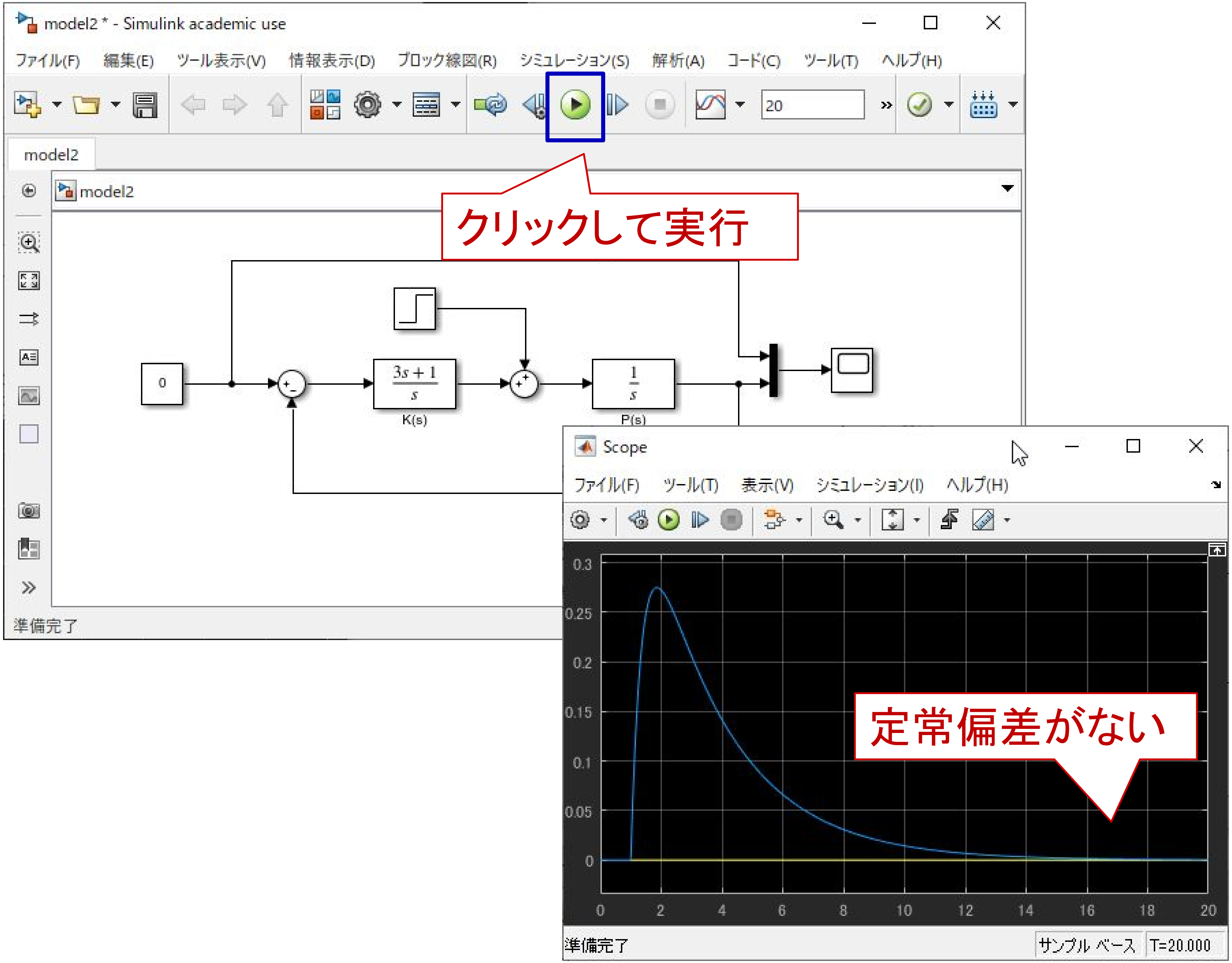
外乱に対する定常偏差

model2.mdl を開く




model2 - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
20
model2
model2
クリックして波形観測
0
5
s + 1
K(s)
1
s
P(s)
準備完了
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
定常偏差が残っている
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
準備完了
サンプル ベース
T=20.000


model2 - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
クリック
0
K(s)
準備完了
ブロック パラメーター: K(s)
Transfer Fcn
分子係数は、ベクトルか行列式です。分母係数は、ベクトルでなければなりません。出力幅は、分子係数の行数と等しくなければなりません。s のべき乗の降順で係数を指定しなければなりません。
パラメーター
分子係数:
[3 1]
[3 ␣ 1] にする
分母係数:
[1 0]
[1 ␣ 0] にする
絶対許容誤差:
auto
状態名:(例: 'position')
OK(O) キャンセル(C) ヘルプ(H) 適用(A)

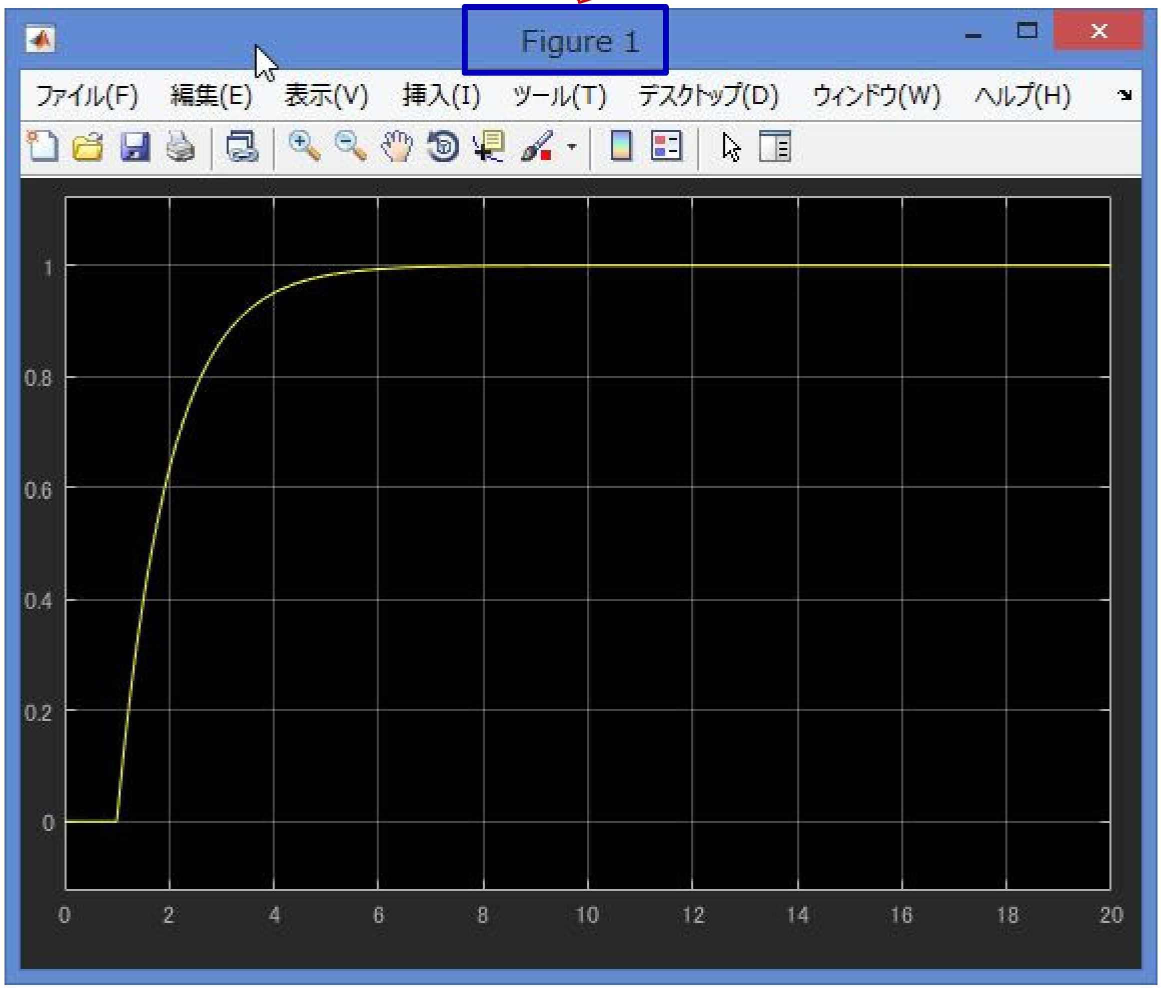


model2 * - Simulink academic use
ファイル(F) 編集(E) ツール表示(V) 情報表示(D) ブロック線図(R) シミュレーション(S) 解析(A) コード(C) ツール(T) ヘルプ(H)
20
model2
クリックして実行
0
3s + 1
s
K(s)
1
s
P(s)
準備完了
Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
定常偏差がない
準備完了
サンプル ベース
T=20.000

図の保存


「ファイル」
Scope
ファイル(F)
ツール(T)
表示(V)
シミュレーション(I)
ヘルプ(H)
シミュレーションの起動時に開く(T)
入力端子の数(U)
クリップボードにコピー(Y) Ctrl+C
印刷(P)... Ctrl+P
印刷プレビュー(V)
Figure へ出力(R)
閉じる(C) Ctrl+W
「Figureへ出力」
0.4
0.2
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
準備完了
サンプル ベース
T=20.000

「Figure1」に変わる



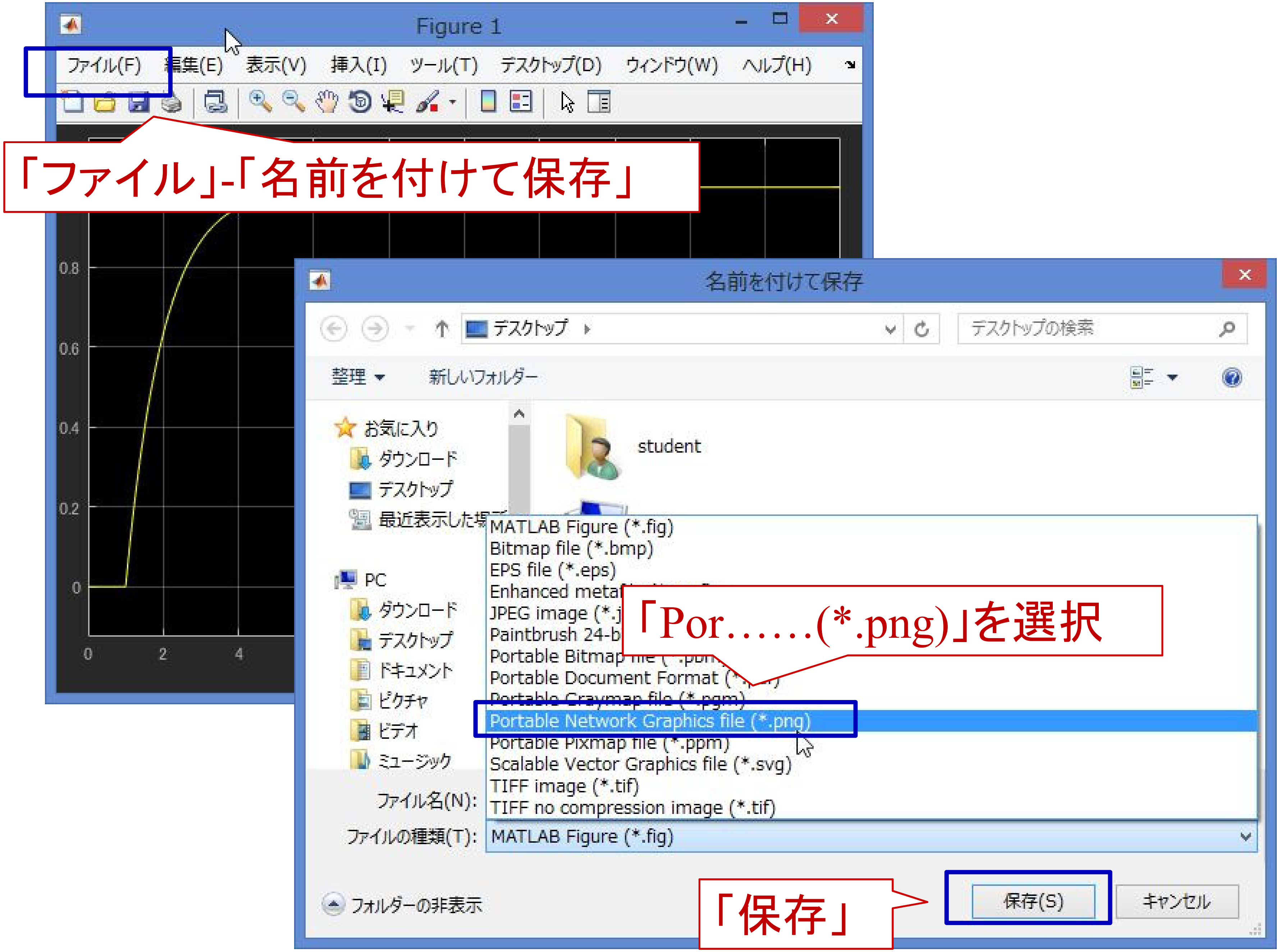
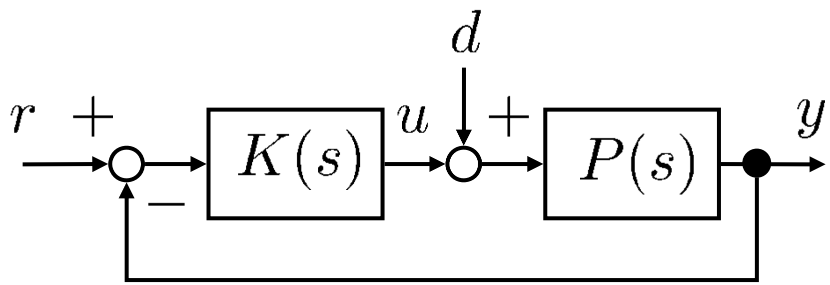


Figure 1
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) 挿入(I) ツール(T) デスクトップ(D) ウィンドウ(W) ヘルプ(H)
「ファイル」-「名前を付けて保存」
名前を付けて保存
デスクトップ
デスクトップの検索
整理
新しいフォルダー
お気に入り
ダウンロード
デスクトップ
PC
ダウンロード
デスクトップ
ドキュメント
ピクチャ
ビデオ
ミュージック
student
MATLAB Figure (*.fig)
Bitmap file (*.bmp)
EPS file (*.eps)
Portable Document Format
Portable Network Graphics file (*.png)
Portable Pixmap file (*.ppm)
Scalable Vector Graphics file (*.svg)
TIFF image (*.tif)
TIFF no compression image (*.tif)
「Por……(*.png)」を選択
ファイル名(N):
ファイルの種類(T):
MATLAB Figure (*.fig)
フォルダーの非表示
「保存」
保存(S)
キャンセル

【問題1】

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

$$K(s) = \frac{2}{s}$$



(1) $d(t) = 0$

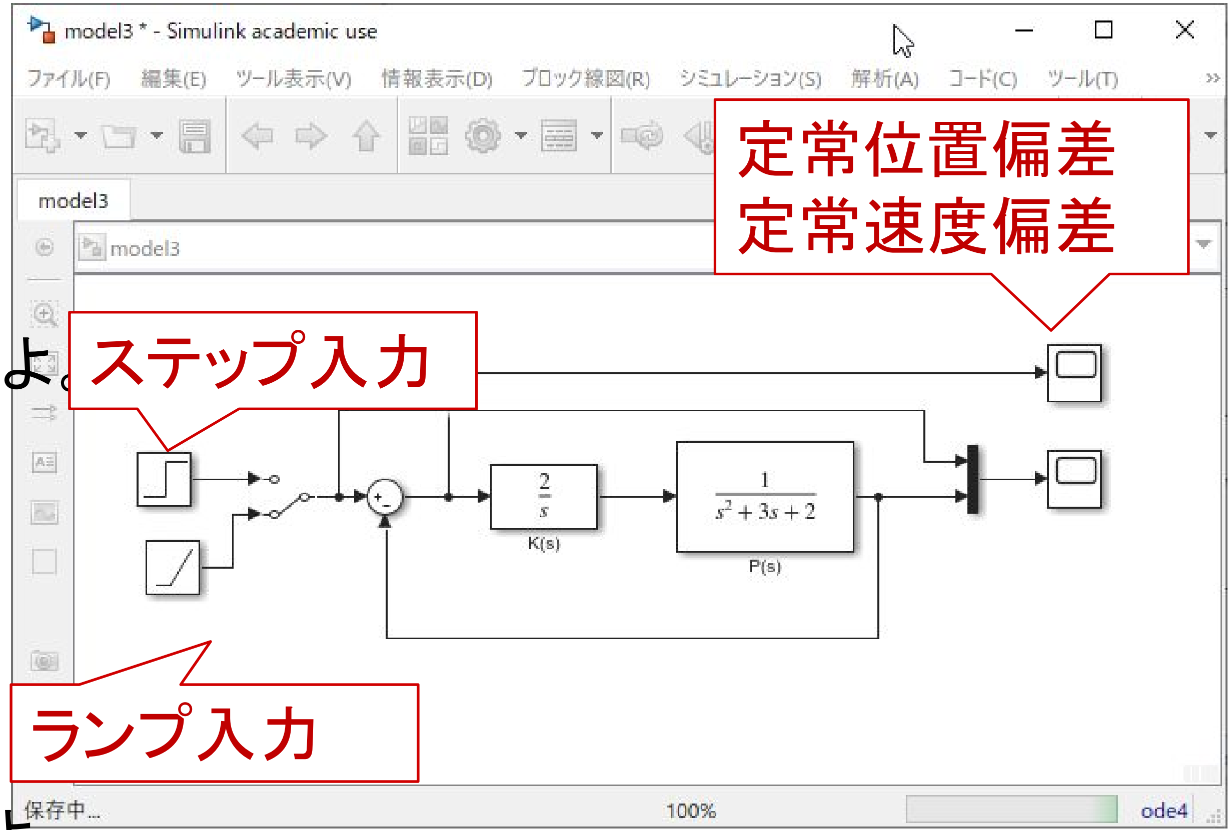
$r(t)$: ステップ入力

定常位置偏差を求めよ。

(2) $d(t) = 0$

$r(t)$: ランプ入力

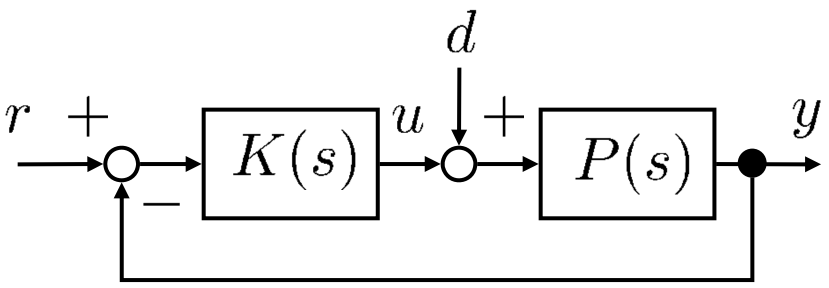
定常速度偏差を求めよ。



【問題2】

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

$$K(s) = \frac{2}{s}$$



(1) $r(t) = 0$

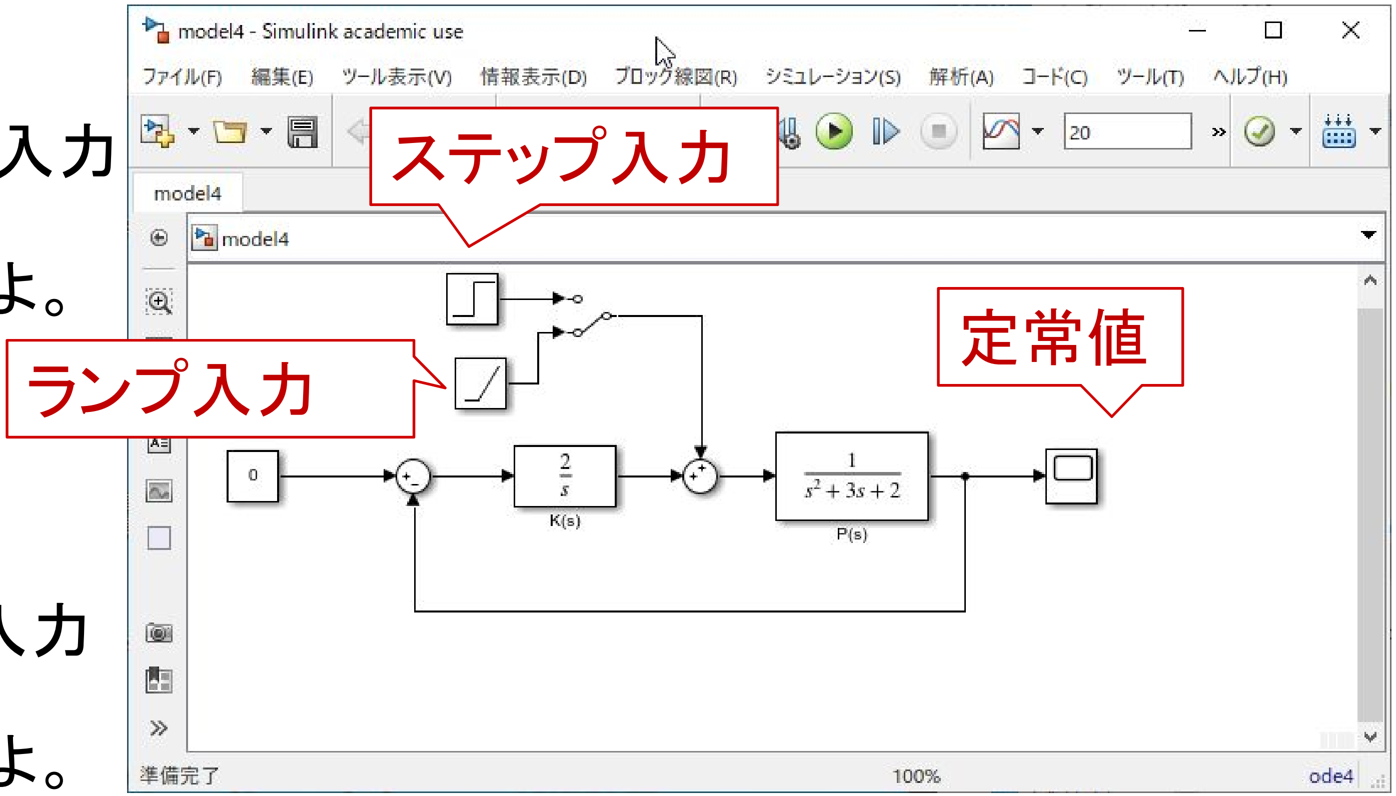
$d(t)$:ステップ入力

定常値を求めよ。

(2) $r(t) = 0$

$d(t)$:ランプ入力

定常値を求めよ。



第 4 章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード： 開ループ伝達関数（一巡伝達関数），
定常偏差，偏差定数，l 型の制御系

学習目標： 定常偏差や偏差定数について理解する。
フィードバック制御系の型について理解する。