2019 年度 制御工学 I 第 2 回レポート (模範解答)

4 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

[問題 1] 教科書【例 2.12】(p. 24-25) の磁気浮上系について，運動方程式 (2.36) と電気回路方程式 (2.37) を線形化して，式 (2.40) を導出せよ。

【解答】

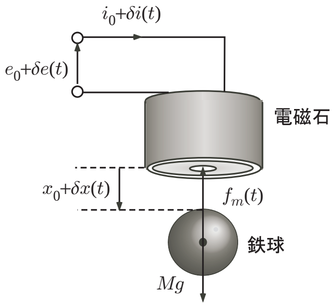

図 1: 磁気浮上系

図 1 のように質量 M [kg] の物体を空中に非接触で浮上させる磁気浮上系を考える。電磁石に流す電流を $i(t)$ [A]，電磁石と物体の間のギャップを $x(t)$ [m] とすると，電磁石による吸引力は $f_m(t)=k(i(t)/x(t))^2$ [N] と表される。ここで，k は電磁石吸引力係数である。したがって，運動方程式は

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}=Mg-k\left(\frac{i(t)}{x(t)}\right)^2 \tag{1}$$

となる。ただし，g [m/s^2] は重力加速度を表す。

一方，電磁石に加える入力電圧を $e(t)$ [V]，電磁石部のインダクタンスと抵抗をそれぞれ L [H], R [Ω] とすると，電気回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=e(t) \tag{2}$$

と書ける。平衡点 (物体にかかる重力と電磁石の吸引力がつり合う状態) のまわりでの微小変化分に着目し

$$\begin{aligned} x(t)&=x_0+\delta x(t),\quad i(t)=i_0+\delta i(t)\\ e(t)&=e_0+\delta e(t) \end{aligned} \tag{3}$$

とおく。平衡状態では電磁石による吸引力と物体にかかる重力が等しい。また，電圧と電流の値に変化がないことから

$$Mg=k\left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2,\quad Ri_0=e_0 \tag{4}$$

の関係が成立する。式 (3) を式 (1)，(2) に代入すると，$\frac{d^2x_0}{dt^2}=0$，$\frac{di_0}{dt}=0$ から次式を得る。

$$M\frac{d^2\delta x(t)}{dt^2}=Mg-k\left(\frac{i_o+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\right)^2 \tag{5}$$

$$L\frac{d\delta i(t)}{dt}+R(i_0+\delta i(t))=e_0+\delta e(t) \tag{6}$$

式 (6) は，式 (4) より $Ri_0=e_0$ を引くことで

$$\underline{\underline{L\frac{d\delta i(t)}{dt}+R\delta i(t)=\delta e(t)}} \tag{7}$$

となる。次に，式 (5) の線形化を考える。第 2 項を次のようにおく。

$$f(\delta x(t),\delta i(t))=k\left(\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\right)^2 \tag{8}$$

これを線形化するが，2 変数の関数のテイラー展開の公式を用いて

$$\begin{aligned} f(\delta x(t),\delta i(t)) &= f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial\delta x(t)}(0,0)\delta x(t)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial\delta i(t)}(0,0)\delta i(t)+\cdots\\ &\simeq k\left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2-2k\frac{i_0^2}{x_0^3}\delta x(t)+2k\frac{i_0}{x_0^2}\delta i(t) \end{aligned} \tag{9}$$

とできる (2 次以上の項を切捨てる)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\delta x(t)} &= 2k\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\frac{\partial}{\partial\delta x(t)}\left(\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\right)\\ &= 2k\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\times\frac{-(i_0+\delta i(t))}{(x_0+\delta x(t))^2}\\ &= -2k\frac{(i_0+\delta i(t))^2}{(x_0+\delta x(t))^3} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial\delta x(t)}(0,0)=-2k\frac{i_0^2}{x_0^3} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\delta i(t)} &= 2k\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\frac{\partial}{\partial\delta i(t)}\left(\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\right)\\ &= 2k\frac{i_0+\delta i(t)}{x_0+\delta x(t)}\times\frac{1}{x_0+\delta x(t)}\\ &= 2k\frac{i_0+\delta i(t)}{(x_0+\delta x(t))^2} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial\delta i(t)}(0,0)=2k\frac{i_0}{x_0^2} \tag{13}$$

$K_x=2ki_0^2/x_0^3$，$K_i=2ki_0/x_0^2$ とおき，式 (4) より $Mg=k(i_0/x_0)^2$ を引くと式 (5) は

$$\underline{\underline{M\frac{d^2\delta x(t)}{dt^2}=K_x\delta x(t)-K_i\delta i(t)}} \tag{14}$$

となる。