

## 2019年度 制御工学 I 第10回レポート(模範解答)

4年 E科 番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

## 【問題 1】 3章演習問題【10】

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき、フルビッツの安定判別法を用いて、システムが安定か否か判別せよ。

(1)  $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 1$

(2)  $s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 3s + 4$

## 【解答】

- (1) 係数はすべて正となっているので、条件 H の (ii) を満たしていることが分かる。次に、行列  $H$  を作成する。

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

小行列式は

$$H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - (4 + 9) = -1$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} H_3 = -1$$

となる。これより  $H_1 \sim H_4$  がすべて正ではないことが分かる。よって、条件 H の (i) を満たしていないため システムは不安定 となる。

- (2) 係数はすべて正となっているので、条件 H の (ii) を満たしていることが分かる。次に、行列  $H$  を作成する。

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

小行列式は

$$H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 48 + 8 - (12 + 36) = 8$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$H_5 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{5+5} \cdot 4 \cdot H_4 = 0$$

となる。これより  $H_1 \sim H_5$  がすべて正ではないことが分かる。よって、条件 H の (i) を満たしていないため システムは不安定 となる。

注意

係数がすべて正であることから、簡略化したフルビッツの安定判別法より  $H_2, H_4$  が正であることを確認することで判定してもよい。

(補足計算)

$$\begin{aligned} H_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - (4 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 2)) \\ &\quad - ((6 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4) - (6 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4)) \\ &= 2(72 + 12) - 2(64 + 18) - (108 + 16) + (96 + 24) \\ &= 168 - 164 - 124 + 120 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

## [問題 2] 3 章演習問題【11】

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき、システムが安定となる  $K$  の範囲を求めよ。

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + (K - 2)s + (4 - K)$$

## 【解答】

## (1) ラウスの安定判別法による解法

条件 R の (ii) を満たすためには  $K - 2 > 0, 4 - K > 0$  である必要がある。次にラウス表を作成する。

ラウス表 [11](b)

$s^4$	1	2	$4 - K$
$s^3$	1	$K - 2$	0
$s^2$	$4 - K = \frac{1 \times 2 - 1 \times (K - 2)}{1}$	$4 - K = \frac{1 \times (4 - K) - 1 \times 0}{1}$	0
$s^1$	$K - 3 = \frac{(4 - K) \times (K - 2) - 1 \times (4 - K)}{4 - K}$	0	0
$s^0$	$4 - K = \frac{(K - 3) \times (4 - K) - (4 - K) \times 0}{K - 3}$	0	0

ラウス数列がすべて正であるためには

$$4 - K > 0 \quad K - 3 > 0$$

を満たす必要がある。

以上から、システムが安定となるための  $K$  の範囲は

$$K - 2 > 0, \quad 4 - K > 0, \quad 3 < K < 4$$

を満たす範囲となる。よって、

$$3 < K < 4$$

となる。

## (2) フルピッツの安定判別法による解法

ここでは、簡単化したフルピッツの安定判別法を用いる。まず、条件 H の (ii) を満たすために  $K - 2 > 0, 4 - K > 0$  である必要がある。次に、行列  $H$  を作成する。

$$H = \begin{pmatrix} 1 & K - 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 - K & 0 \\ 0 & 1 & K - 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 - K \end{pmatrix}$$

小行列

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} 1 & K - 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 - K \\ 0 & 1 & K - 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(K - 2) - ((4 - K) + (K - 2)^2) \\ &= -K^2 + 7K - 12 > 0 \end{aligned}$$

であればよい。よって、

$$\begin{aligned} -K^2 + 7K - 12 > 0 \\ \Rightarrow K^2 - 7K + 12 < 0 \\ \Rightarrow (K - 4)(K - 3) < 0 \end{aligned}$$

から

$$3 < K < 4$$

である。以上から、システムが安定となるための  $K$  の範囲は

$$K - 2 > 0, \quad 4 - K > 0, \quad 3 < K < 4$$

を満たす範囲となる。よって、

$$3 < K < 4$$

となる。