

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.2 ロバスト安定性

キーワード：ロバスト安定性, 相補感度関数

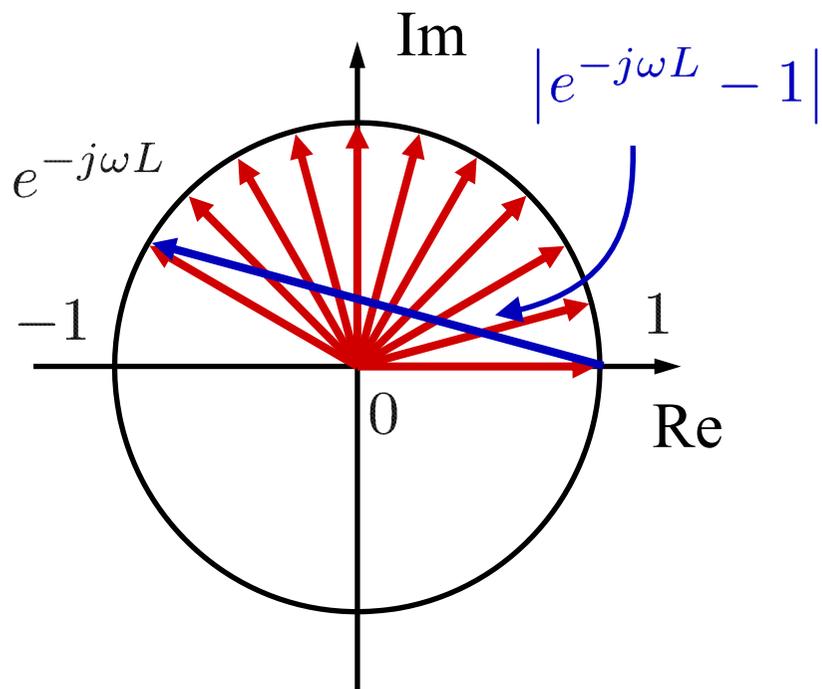
学習目標：ロバスト安定性について, その性質と条件を理解する。

[例 7.4] むだ時間変動

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s+1} e^{-sL}, \quad 0 \leq L \leq 1$$

ノミナルモデル $P(s) = \frac{1}{s+1}$

乗法的な不確かさの大きさ $\left| \frac{\tilde{P}}{P} - 1 \right| = \left| \frac{\tilde{P} - P}{P} \right| = |e^{-j\omega L} - 1|$



乗法的な不確かさの大きさ
(の上限値)

$$0 \leq \omega < \pi$$

$$|e^{-j\omega L} - 1| \leq |e^{-j\omega} - 1|$$

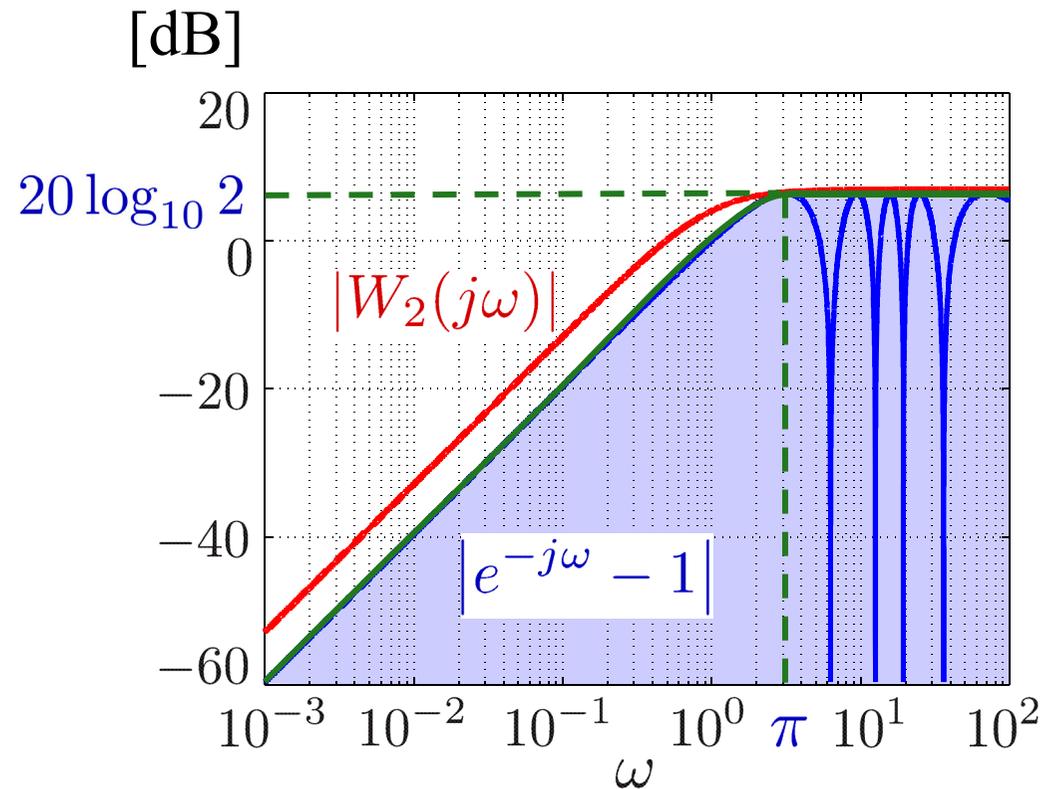
$$\omega \geq \pi \quad (\because 0 \leq L \leq 1)$$

$$|e^{-j\omega L} - 1| \leq 2$$

不確かさの周波数重み

$$W_2(s) = \frac{2.1s}{s+1}$$

起こりうる不確かさを
すべてカバーしている。



$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad W_2(s) = \frac{2.1s}{s+1} \text{ として,}$$

図 7.8 むだ時間変動に対する
周波数重み関数

$$\text{モデル集合 } \mathcal{P} = \left\{ (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s), \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega \right\}$$

を考えると, 任意の $\tilde{P}(s) = \frac{1}{s+1}e^{-sL}$, $0 \leq L \leq 1$ はこのモデル

集合の中に含まれる。

7 フィードバック制御系のロバスト性解析

7.2 ロバスト安定性

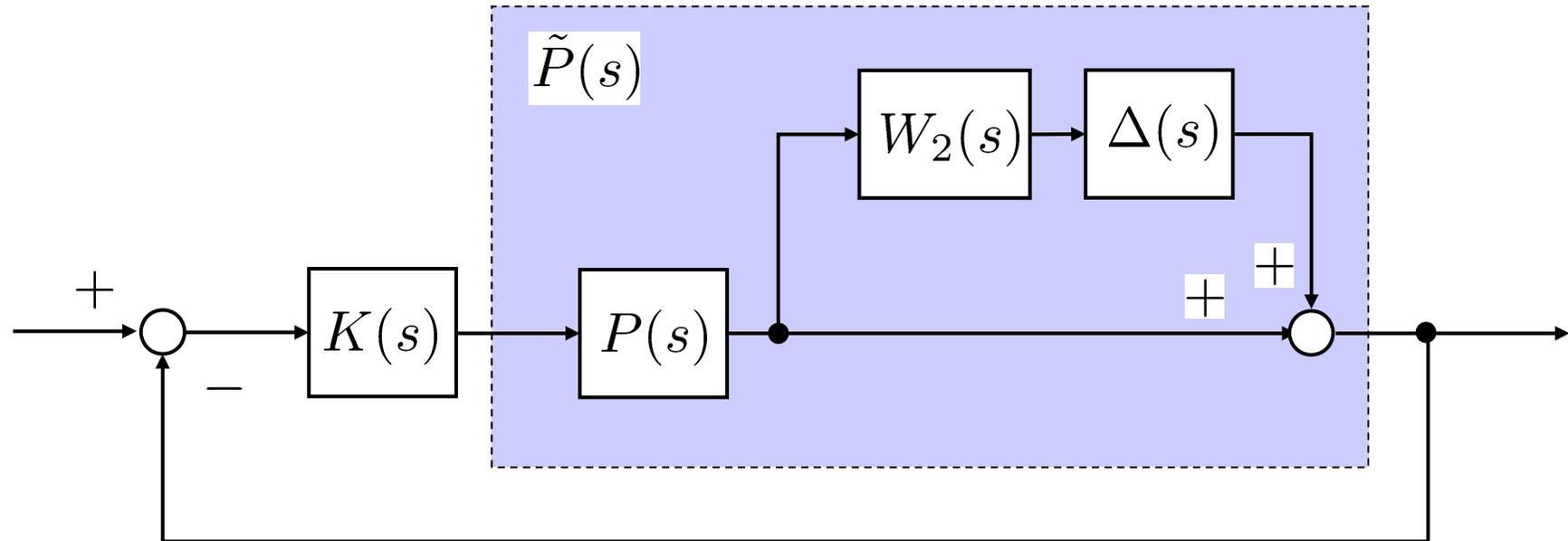


図 7.9 乗法的な不確かさを有するフィードバック系

モデルに不確かさがある場合でも，内部安定性は保たれるのか？

ロバスト安定性とは

コントローラ $K(s)$ が集合 \mathcal{P} に属するすべての $\tilde{P}(s)$ に対して内部安定性を保証すること

不確かなモデル

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)$$

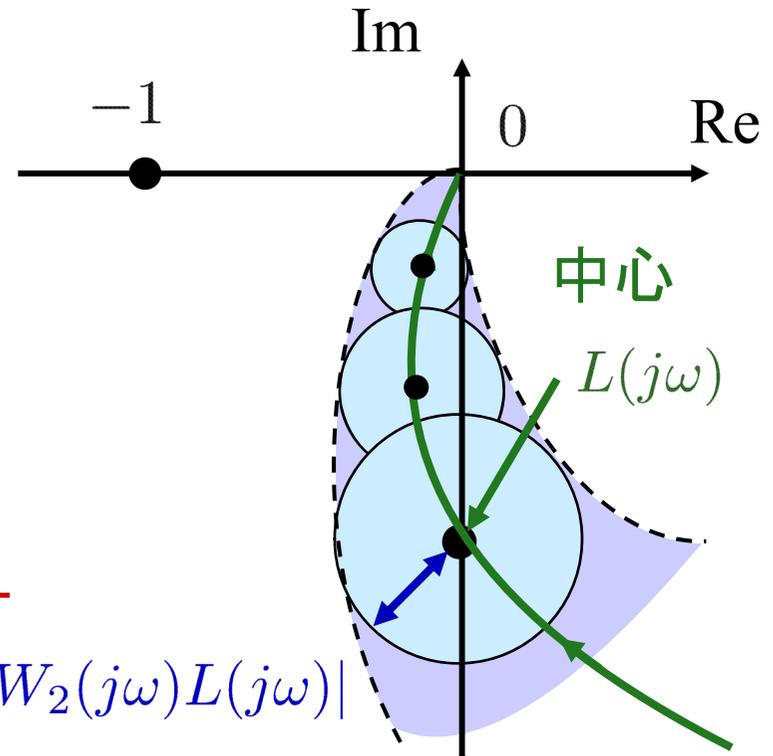
不確かな開ループ伝達関数

$$\tilde{L}(s) = \tilde{P}(s)K(s)$$

$$= (1 + \Delta(s)W_2(s))\underline{P(s)K(s)}$$

$$= \underline{L(s) + \Delta(s)W_2(s)L(s)} \quad |W_2(j\omega)L(j\omega)|$$

開ループの帯



任意の $\tilde{L}(s)$ について, そのベクトル軌跡
が点 $(-1, 0)$ をまわらなければ安定

(\because ナイキストの安定判別法)

\tilde{L} のベクトル軌跡

$$|\tilde{L} - L| = |\Delta W_2 L| \leq |W_2 L|$$

半径 $|W_2 L|$, 中心 L の円盤の内側

$$|-1 - L| = |1 + L|$$

-1 と L の距離



$|W_2 L| < |1 + L|, \forall \omega$ ならば

任意の \tilde{L} について, そのベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ をまわらない。

ロバスト安定

$$\left| \frac{W_2 L}{1 + L} \right| < 1, \forall \omega$$

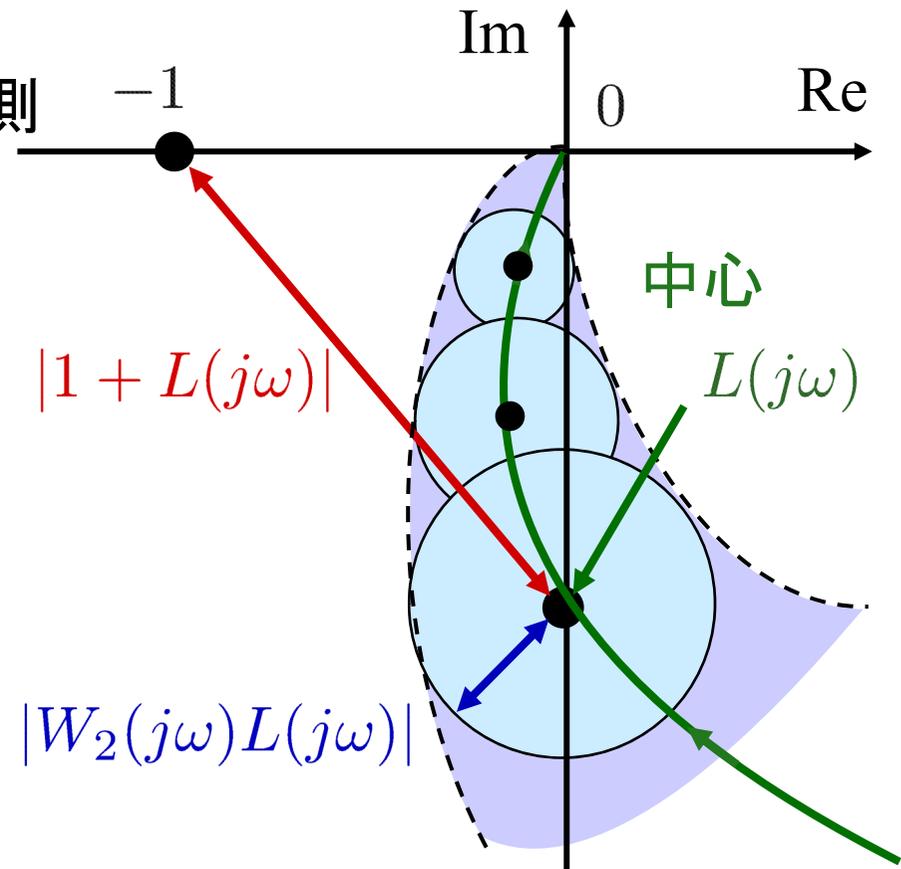
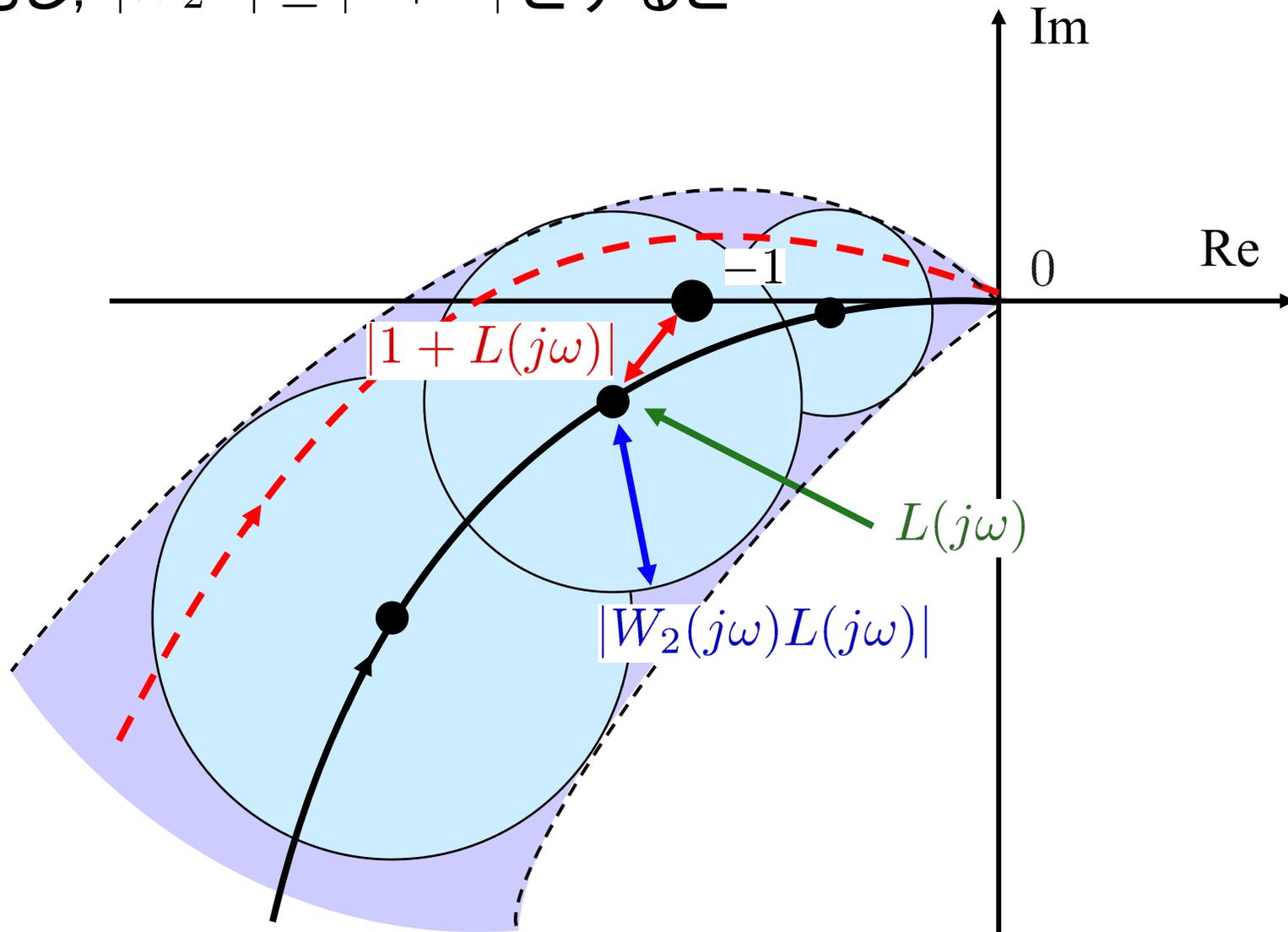
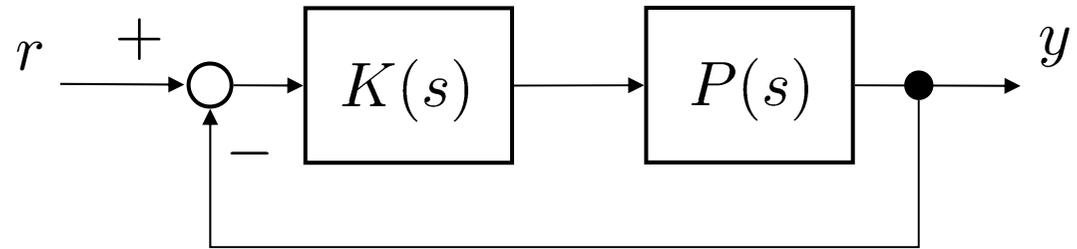


図 7.10 ベクトル軌跡による
ロバスト安定性

もし、 $|W_2L| \geq |1 + L|$ とすると



$|W_2L| \geq |1 + L|$ のとき不安定の可能性がある



相補感度関数

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} \quad : r \rightarrow y \text{ への伝達関数}$$

感度関数

➡ $S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}$ より,

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} + \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = 1$$

相補感度関数を用いると

$$\left| \frac{W_2 L}{1 + L} \right| < 1, \quad \forall \omega$$

$$\Rightarrow |W_2 T| < 1, \quad \forall \omega$$

よって,

$$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \quad \forall \omega$$

➡ T は小さい方が良い

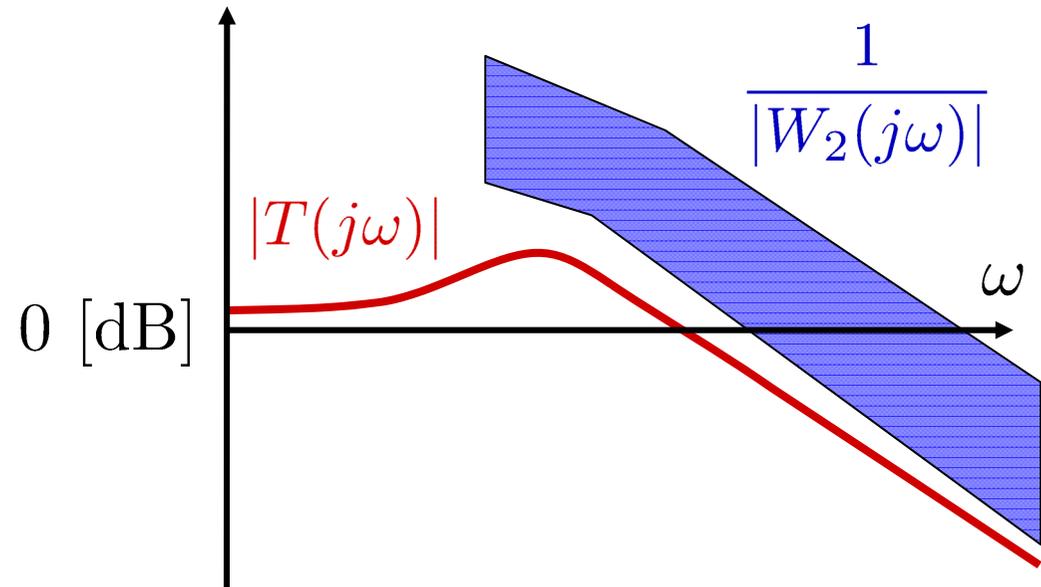


図 7.11 相補感度関数と
ロバスト安定性

MATLAB演習

7章演習問題【4】

$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$K(s) = 1$$

$$W_{2A}(s) = \frac{\zeta s}{s + \omega_n}$$

$$W_{2B}(s) = \frac{5\zeta s}{s + \omega_n}$$

ロバスト安定

$$\left| \frac{W_2 L}{1 + L} \right| < 1, \quad \forall \omega$$

$$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \quad \forall \omega$$

file6_1.m を実行

```
omega_n = 1;  
zeta = 1;  
  
P_nom = tf(omega_n^2,[1 2*zeta*omega_n 0])  
K = 1;  
  
W2A = tf([zeta 0],[1 omega_n]);  
  
D = ultidyn('Delta',[1 1]);  
  
T = feedback(P_nom,1);  
  
figure(1)  
nyquist(P_nom*K*(1 + W2B*D))  
figure(2)  
hold on  
bodemag(TA)  
hold on  
bodemag(1/W2A)
```

$$\omega_n = 1, \zeta = 1$$

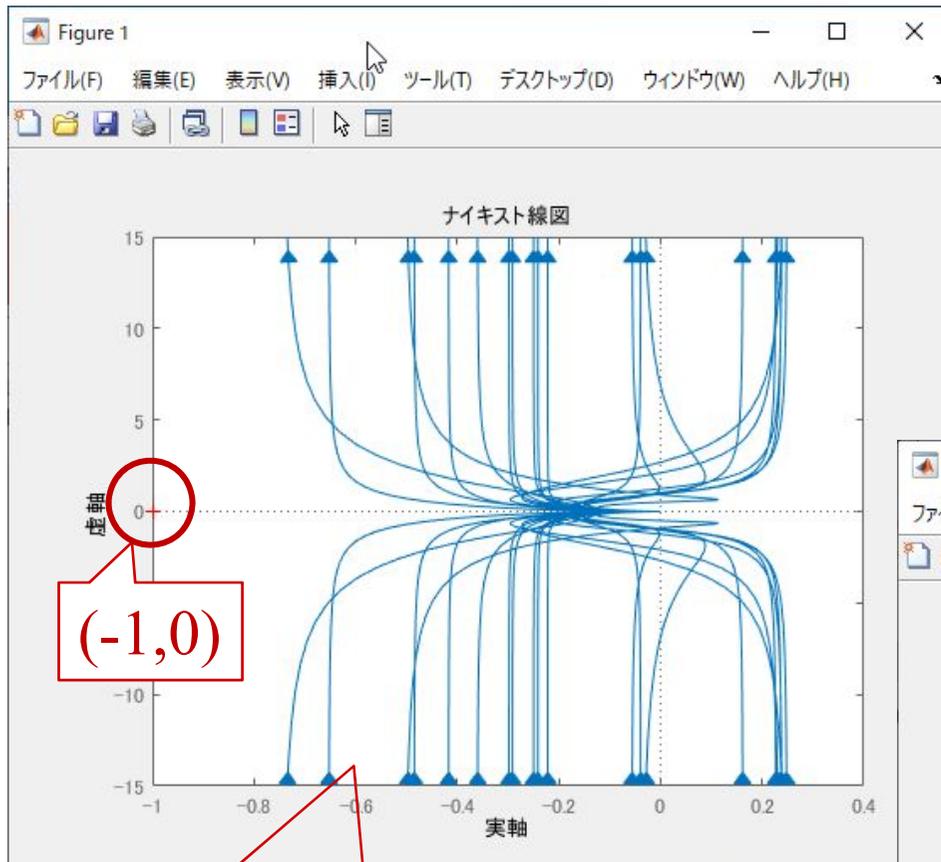
$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$K(s) = 1$$

$$W_{2A}(s) = \frac{\zeta s}{s + \omega_n}$$

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$\tilde{P}_A = (1 + \Delta(s)W_{2A}(s))P(s)K(s)$$



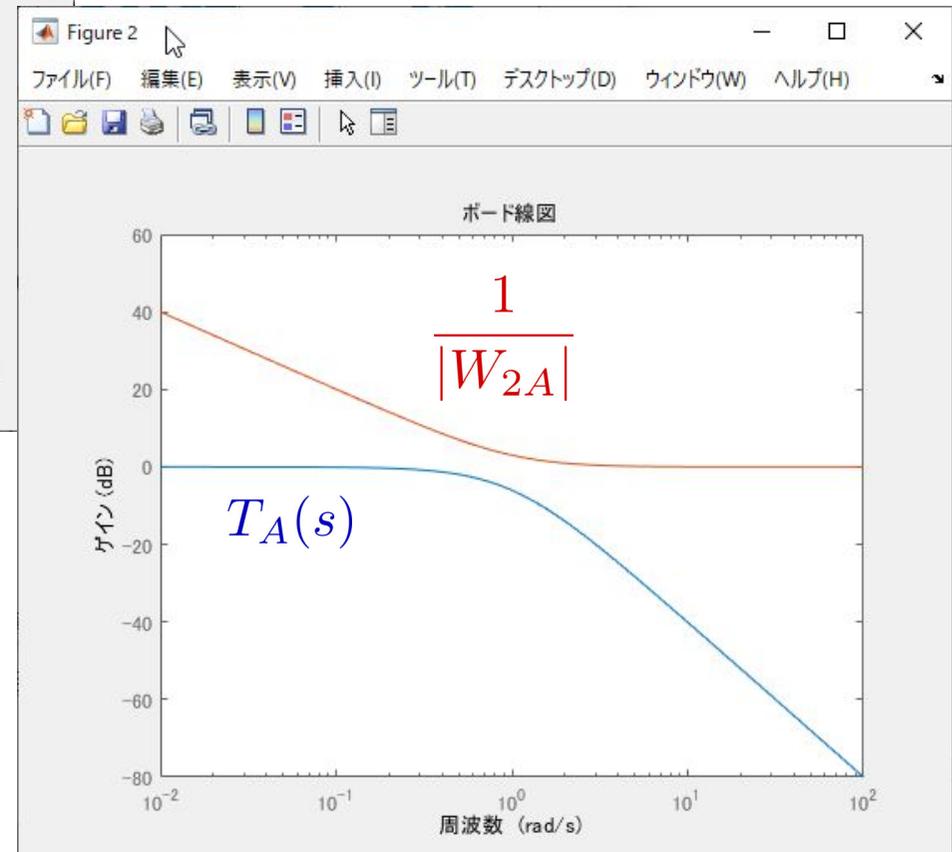
すべての \tilde{P}_A が $(-1,0)$ を
左にみて通過する

ロバスト安定

$$|T_A| < \frac{1}{|W_{2A}|}, \quad \forall \omega$$

↓

ロバスト安定



file6_2.m を実行

```
omega_n = 1;
zeta = 1;

P_nom = tf(omega_n^2,[1 2*zeta*omega_n 0])
K = 1;

W2B = tf([5*zeta 0],[1 omega_n]);

D = ultidyn('Delta',[1 1]);
TB = feedback(P_nom*K,1);

figure(3)
nyquist(P_nom*K*(1 + W2B*D))
figure(4)
hold on
bodemag(TB)
hold on
bodemag(1/W2B)
```

$$\omega_n = 1, \zeta = 1$$

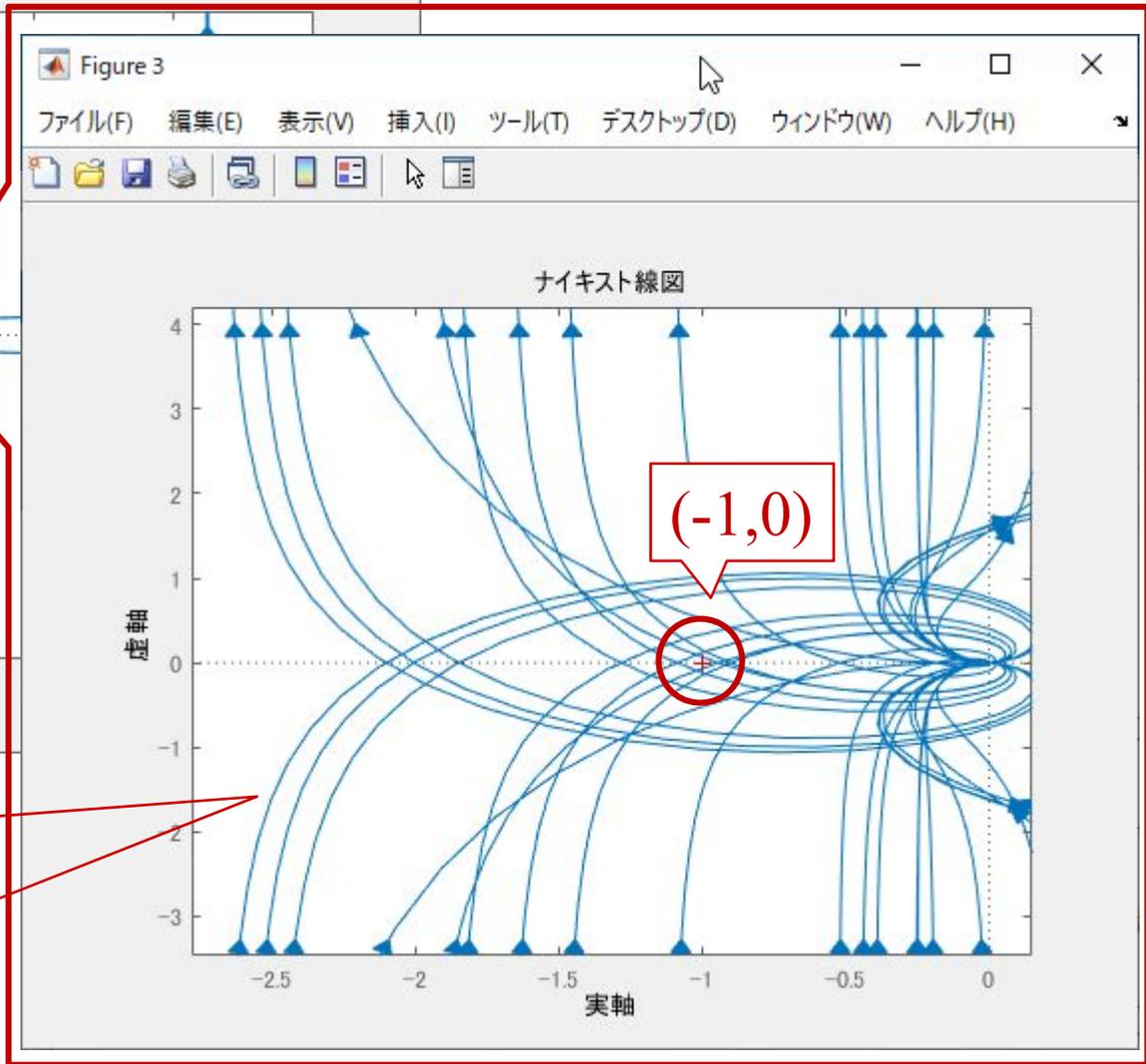
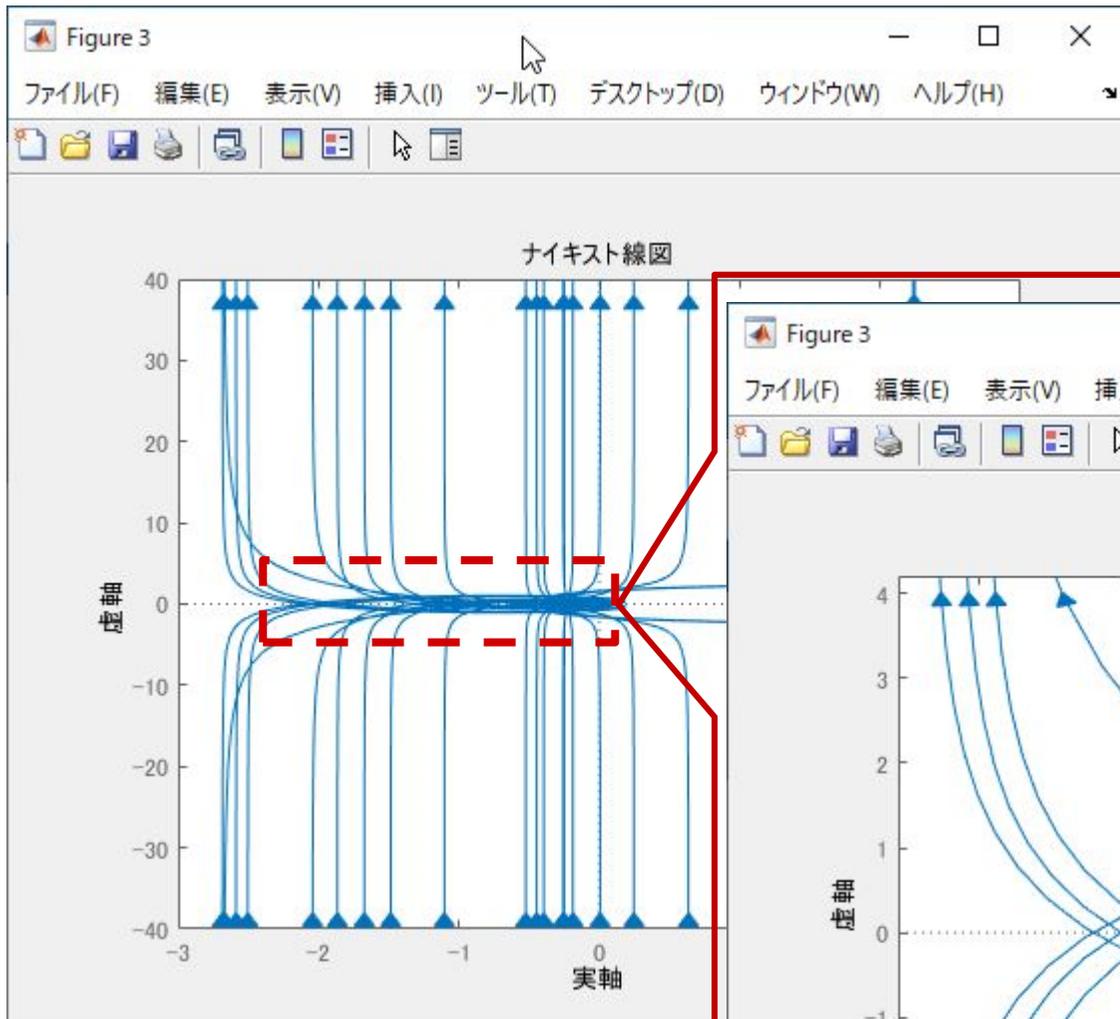
$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$K(s) = 1$$

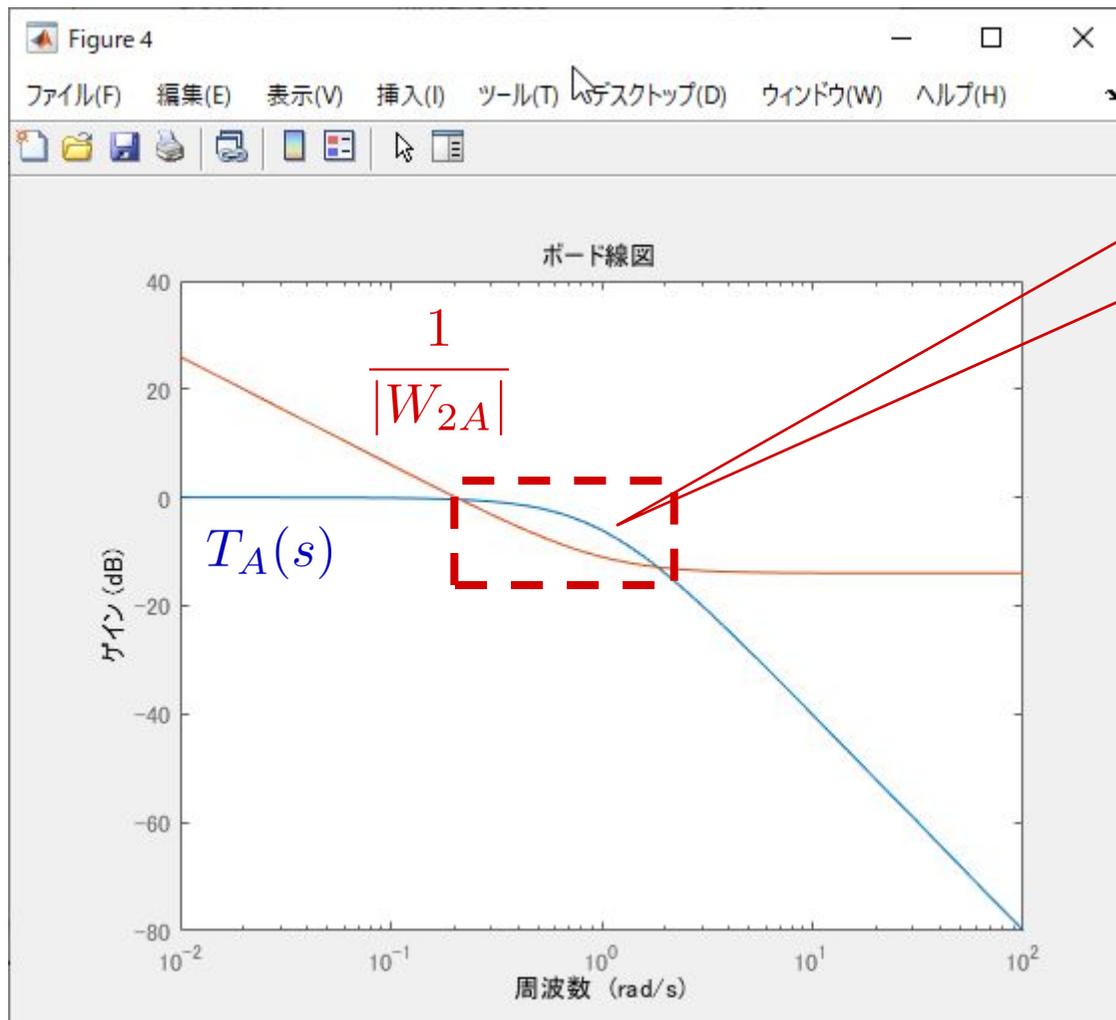
$$W_{2B}(s) = \frac{5\zeta s}{s + \omega_n}$$

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$\tilde{P}_B = (1 + \Delta(s)W_{2B}(s))P(s)K(s)$$



(-1,0)を右にみて通過するベクトル軌跡がある
 ↓
 ロバスト安定でない



$$|T_A| < \frac{1}{|W_{2A}|}, \quad \forall \omega$$

を満たさない



ロバスト安定でない

file6_3.m

【課題1】P制御 (KP だけで, $KD = 0$, $KI = 0$) でロバスト安定なKPを
答え, ナイキスト軌跡, ゲイン線図 ($T(s)$, $\frac{1}{|W_2|}$) を描け。

```
% -----  
KP = xxxxx;  
KD = 0;  
KI = 0;  
% -----  
K = tf([KD KP KI],[1 0])  
K_nom = 10;  
T_nom = 0.0933;  
P_nom = tf(K_nom,[T_nom 1 0])  
W2 = 0.065*tf([0.5 1],[0.12 1]);  
D = ultidyn('Delta',[1 1]);  
T = feedback(P_nom*K,1);  
.....
```

【課題2】PI制御(KP, KI だけで, $KD = 0$)でロバスト安定なKP, KI を
答え, ナイキスト軌跡, ゲイン線図($T(s)$, $\frac{1}{|W_2|}$)を描け。

```
% -----
```

```
KP = xxxxx;
```

```
KD = 0;
```

```
KI = xxxxx;
```

```
% -----
```

```
K = tf([KD KP KI],[1 0])
```

```
K_nom = 10;
```

```
T_nom = 0.0933;
```

```
P_nom = tf(K_nom,[T_nom 1 0])
```

```
W2 = 0.065*tf([0.5 1],[0.12 1]);
```

```
D = ultidyn('Delta',[1 1]);
```

```
T = feedback(P_nom*K,1);
```

```
.....
```

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.2 ロバスト安定性

キーワード：ロバスト安定性, 相補感度関数

学習目標：ロバスト安定性について, その性質と条件を理解する。