2019 年度 制御工学 II 後期 第 13 回講義資料 演習問題 (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ____________________________

[**問題 1**](9 章演習問題 【3】)
図 9.5 の 2 自由度制御系において，制御対象の公称値が $P(s) = 1/(s-2)$ で与えられ，制御器としてつぎの (a) を考える。

(a) $F(s) = \frac{b}{s+a}$, $K(s) = c$
(b) $F(s) = \dfrac{c}{s^2+as+b}$, $K(s) = \frac{ds+e}{s}$

このとき，下記の問いに答えよ。

(1) 制御系が安定となるためにパラメータ (a〜e) が満たすべき条件を求めよ。

(2) r をステップ関数とするとき，y が定常偏差なくこれに追従するためにパラメータが満たすべき条件を求めよ。

(3) 上記に加えて，オーバーシュートが生じないための条件を求めよ。

(4) 以上の条件のもとで，制御対象が $1/(s-2) \to 1/(s-1)$ に変動したとき，定常偏差はどうなるか。

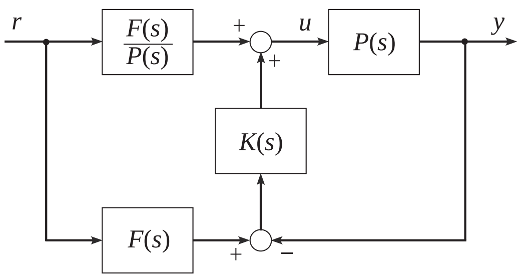

図 1: 図 9.5

[解答]

(1) 制御系が安定となる条件は，$F(s)$，$P^{-1}(s)F(s)$ が安定かつ，$P(s)$，$K(s)$ からなる閉ループ系が内部安定であることである。$F(s) = b/(s+a)$，$P^{-1}(s)F(s) = b(s-2)/(s+a)$ より，これらが安定となる条件は $\underline{a>0}$ となる。次に，閉ループ系の特性多項式は $P(s)$ と $K(s)$ の分子・分母の多項式を

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)},\quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)} \tag{1}$$

とすると

$$\Phi(s) = D_P(S)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) \tag{2}$$

であることより，$\Phi(s) = s + (c-2)$。よって，内部安定のための条件は $\underline{c>2}$ となる。よって，$\underline{a>0,\ c>2}$。

(2) r から y への伝達関数は，

$$\begin{aligned} y &= P\left\{\frac{F}{P}r + K(Fr-y)\right\} \\ (1+PK)y &= (1+PK)Fr \\ y &= Fr \end{aligned} \tag{3}$$

となり，定常偏差は

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t\to\infty}(r-y) = \lim_{t\to\infty}(r-Fr) \\ &= \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{1}{s} - F\frac{1}{s}\right) = 1 - \lim_{s=0} F \\ &= 1 - \lim_{s=0}\frac{b}{s+a} = 1 - \frac{b}{a} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

となればよいので，(1) の条件かつ $\underline{a=b}$ が条件となる．よって，$\underline{a>0,\ c>2,\ a=b}$ である。

(3) 先に示した通り，r から y への伝達関数は $G_{yr} = F = b/(s+a)$ (1 次系) であるので，安定であればオーバーシュートは生じない.

(4) 制御対象が $P = 1/(s-2)$ から $\tilde{P} = 1/(s-1)$ と変化したので，P を $\tilde{P}$ としたときの r から y への伝達関数を求めると

$$\begin{aligned} y &= \tilde{P}\left\{\frac{F}{P}r + K(Fr-y)\right\} \\ (1+\tilde{P}K)y &= \left\{\frac{\tilde{P}F}{P} + \tilde{P}KF\right\}r \\ y &= \frac{\frac{\tilde{P}}{P} + \tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}Fr \\ &= \frac{\frac{s-2}{s-1} + \frac{1}{s-1}c}{1 + \frac{1}{s-1}c}\cdot\frac{b}{s+a}r \\ &= \frac{s-2+c}{s-1+c}\cdot\frac{b}{s+a}r \end{aligned} \tag{5}$$

となる。偏差は，

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{s=0} s(r-y) \\ &= \lim_{s=0} s\left(\frac{1}{s} - \frac{s-2+c}{s-1+c}\cdot\frac{b}{s+a}\frac{1}{s}\right) = 1 - \frac{b(c-2)}{a(c-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

$a = b$ のとき，以下のようになる。

$$e_s = \frac{c-1-(c-2)}{c-1} = \underline{\frac{1}{c-1}} \tag{7}$$

(b)

(1) (a) の (1) と同様に考えると，$F(s) = c/(s^2+as+b)$，$P^{-1}(s)F(s) = c(s-2)/(s^2+as+b)$ より，これらが安定であるための条件は，ラウスの安定判別法

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & b \\ s & a & \\ s^0 & \frac{ab}{a} = b & \end{array}$$

より $\underline{a > 0，b > 0}$ となる。また，閉ループ系の特性方程式は，$\Phi(s) = s^2 + (d-2)s + e$ となり，内部安定となる条件は，ラウスの安定判別法

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & e \\ s & d-2 & \\ s^0 & e & \end{array}$$

より，$\underline{d > 2，e > 0}$ となる.

$\underline{\text{したがって条件は，} a > 0，b > 0，d > 2，e > 0.}$

(2) r から y への伝達関数は，$y = Fr$ より

$$G_{yr} = F = \frac{c}{s^2 + as + b} \tag{8}$$

となる。定常偏差は

$$e_s = 1 - \lim_{s=0} F = 1 - \lim_{s=0} \frac{c}{s^2+as+b} = 1 - \frac{c}{b} = 0 \tag{9}$$

となればよいので，(1) の条件かつ，$\underline{b = c}$ が条件となる。よって，$\underline{a > 0, b > 0, d > 2, e > 0, b = c}$ である。

(3) $G_{yr} = F = c/(s^2 + as + b)$ より，2 次系の式にあてはめると

$$G_{yr} = \frac{\frac{c}{b} b}{s^2 + 2\frac{a}{2\sqrt{b}}\sqrt{b}s + b} \tag{10}$$

より，$\zeta = a/2\sqrt{b}$，$\omega_n = \sqrt{b}$ となる。オーバーシュートが生じないためには，安定かつ $\zeta \geq 1$ であるので，(1)，(2) の条件かつ $\underline{a \geq 2\sqrt{b}}$ が条件となる.
$\underline{\text{よって，} a > 0，b > 0，d > 2，e > 0，b = c, a \geq 2\sqrt{b} \text{ である。}}$

(4) (a) の (4) と同様に P を $\tilde{P}$ としたときの，r から y への伝達関数を求めると

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{\tilde{P}}{P} + \tilde{P}K}{1 + \tilde{P}K} Fr \\ &= \frac{\frac{s-2}{s-1} + \frac{1}{s-1}\frac{ds+e}{s}}{1 + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{ds+e}{s}} \frac{c}{s^2+as+b} r \\ &= \frac{s(s-2) + ds + e}{s(s-1) + ds + e} \frac{c}{s^2+as+b} r \\ &= \frac{s^2 + (d-2)s + e}{s^2 + (d-1)s + e} \frac{c}{s^2+as+b} r \end{aligned} \tag{11}$$

となる。定常偏差は

$$\begin{aligned} e_s &= 1 - \lim_{s=0} s \cdot \frac{s^2+(d-2)s+e}{s^2+(d-1)s+e} \frac{c}{s^2+as+b} \frac{1}{s} \\ &= 1 - \lim_{s=0} \cdot \frac{s^2+(d-2)s+e}{s^2+(d-1)s+e} \frac{c}{s^2+as+b} \\ &= 1 - \frac{c}{b} \end{aligned} \tag{12}$$

$b = c$ のとき，次のようになる。

$$e_s = \underline{0} \tag{13}$$