第 5 章 :周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード：周波数伝達関数，ゲイン，位相

学習目標 :システムの周波数応答特性を理解する。

5 周波数応答
5.1 周波数応答と伝達関数

線形システム（安定な LTI システム）

（一定周波数の）正弦波を入力として加え続けると，定常状態ではその出力も入力と**同じ周波数**の正弦波になる.

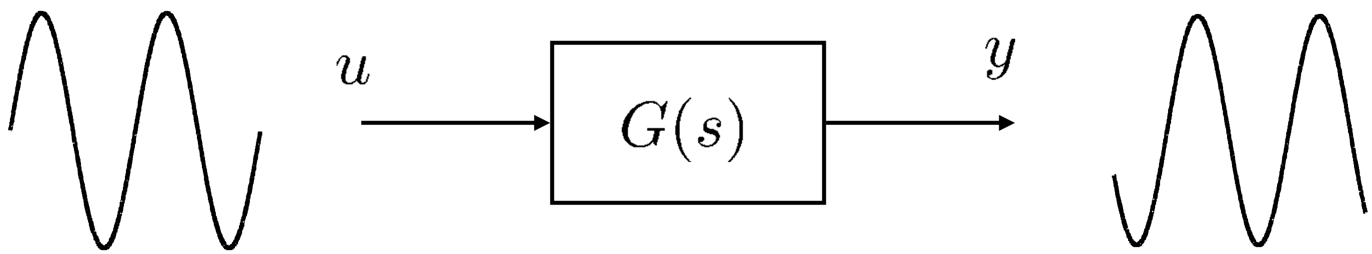
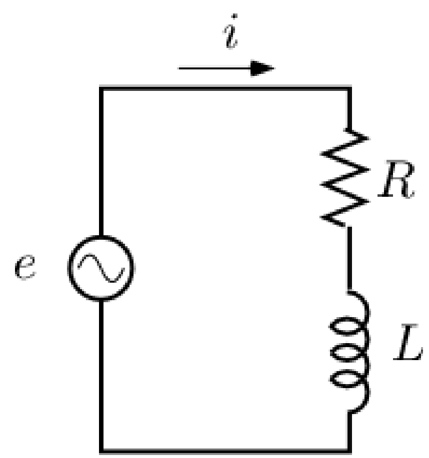


図 5.1 周波数応答

［例］RL直列回路

$$I = \frac{E}{R + j\omega L}$$
$$= \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\angle\theta} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\angle - \theta$$

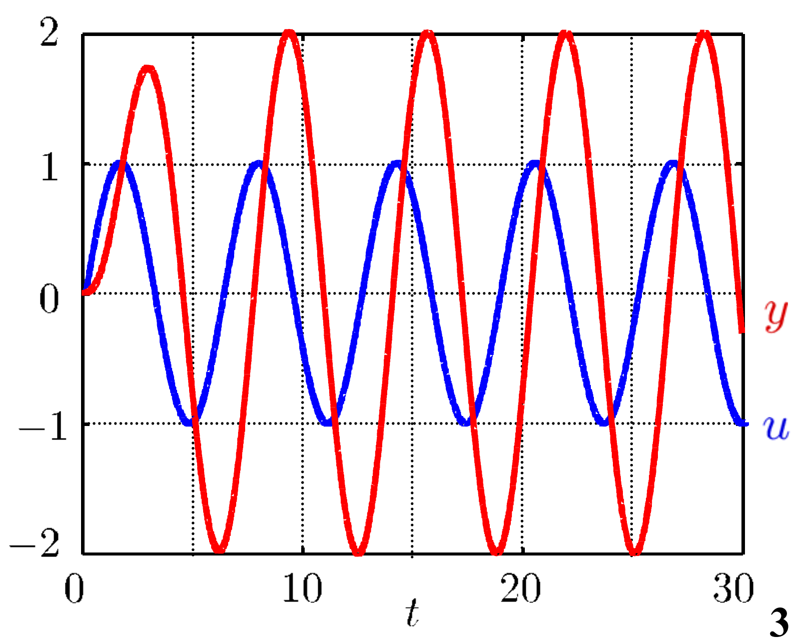


（出力）電流 i は，（入力）電圧 e に対して

振幅 $\dfrac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ だけ増幅され

位相 $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$ だけ遅れる

入力と出力は同じ周波数，異なるのは振幅と位相だけ



周波数特性

入力の周波数を変化させた($\omega : 0 \sim \infty$)とき
振幅と位相がどのように変化するか

伝達関数 $G(s)$

極 $p_i(i = 1 \sim n)$は安定 $(\mathrm{Re}[p_i] < 0)$ で，すべて異なる。

(例)安定と不安定

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \qquad p_i = 1 \pm j2 \qquad \mathrm{Re}[p_i] = 1$$ 不安定

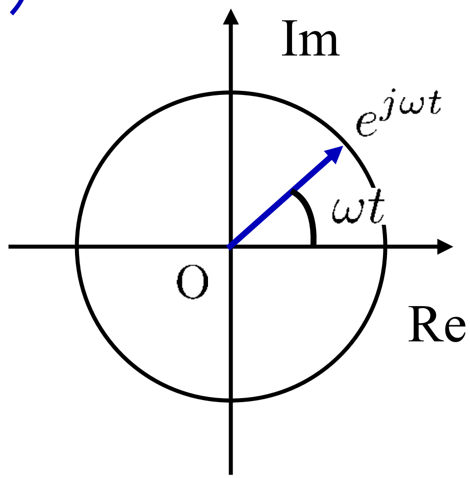
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \qquad p_i = -1 + j2 \qquad \mathrm{Re}[p_i] = -1$$ 安定

（仮想的な）複素数の入力 （複素正弦波）

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$\left(\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \right)$$ （p. 192 参照）

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s - j\omega}$$



出力

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s-j\omega} \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_0}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i} \right]$$

$$= K_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

$G(s)$ の安定性 $(\mathrm{Re}[p_i] < 0)$ より $e^{p_i t} \to 0 \quad (t \to \infty)$

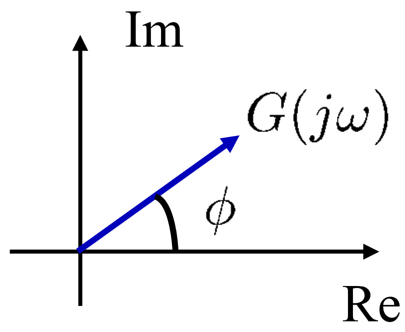
$$Y(s) = \sum_i \frac{Y_i}{s - \alpha_i} \qquad Y_i = \lim_{s \to \alpha_i} (s - \alpha_i) Y(s)$$ （留数）

よって

$$K_0 = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega) \left[G(s) \frac{1}{s - j\omega} \right]$$

$$= G(j\omega)$$

$$= |G(j\omega)| e^{j\phi} \qquad \phi = \angle G(j\omega)$$



上記の留数は，実数で考える部分分数展開の係数と同じ

（例）$G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{K_1}{s+1} + \dfrac{K_2}{s+2}$

$$K_1 = (s+1)G(s)\big|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$ の計算は，極座標表示した

（例）$G(j\omega) = 1 + j\sqrt{3} = 2\angle 60^\circ$

$$y(t) = \underbrace{K_0}_{G(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} K_i \underbrace{e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \to 0}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= G(j\omega)e^{j\omega t} \\ &= |G(j\omega)|e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \\ &= |G(j\omega)|e^{j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$

入力	出力
$\cos \omega t$	$\lvert G(j\omega)\rvert \cos(\omega t + \phi)$
$\sin \omega t$	$\lvert G(j\omega)\rvert \sin(\omega t + \phi)$

$$y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi) + j|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

振幅の変化 $|G(j\omega)|$　ゲイン

位相の差 $\angle G(j\omega)$　位相（位相差）

[例] $G(s) = \dfrac{2}{s^2+s+1}, \quad u(t) = \sin t$

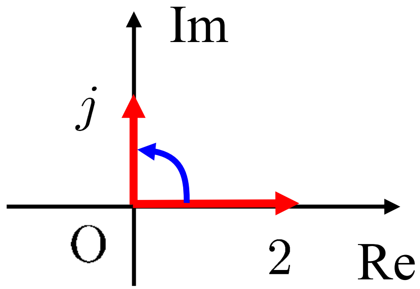
$(\omega = 1)$

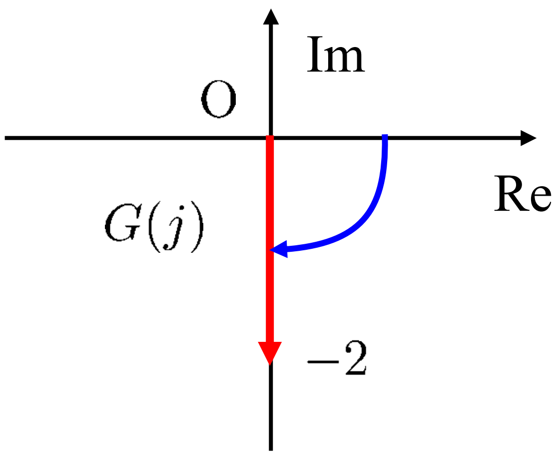
ゲイン

$$|G(j)| = \left|\frac{2}{j^2+j+1}\right| = \left|\frac{2}{-1+j+1}\right| = \left|\frac{2}{j}\right| = 2$$

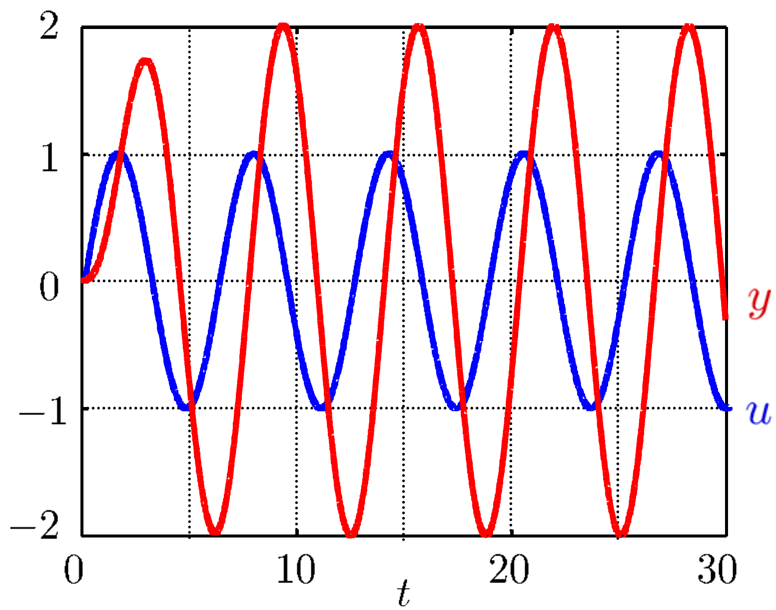
位相

$$\angle G(j) = \angle\frac{2}{j} = \underbrace{\angle 2}_{=0^\circ} - \underbrace{\angle j}_{\text{+方向に位相を考える}} = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$





複素平面上のベクトル $G(j)$

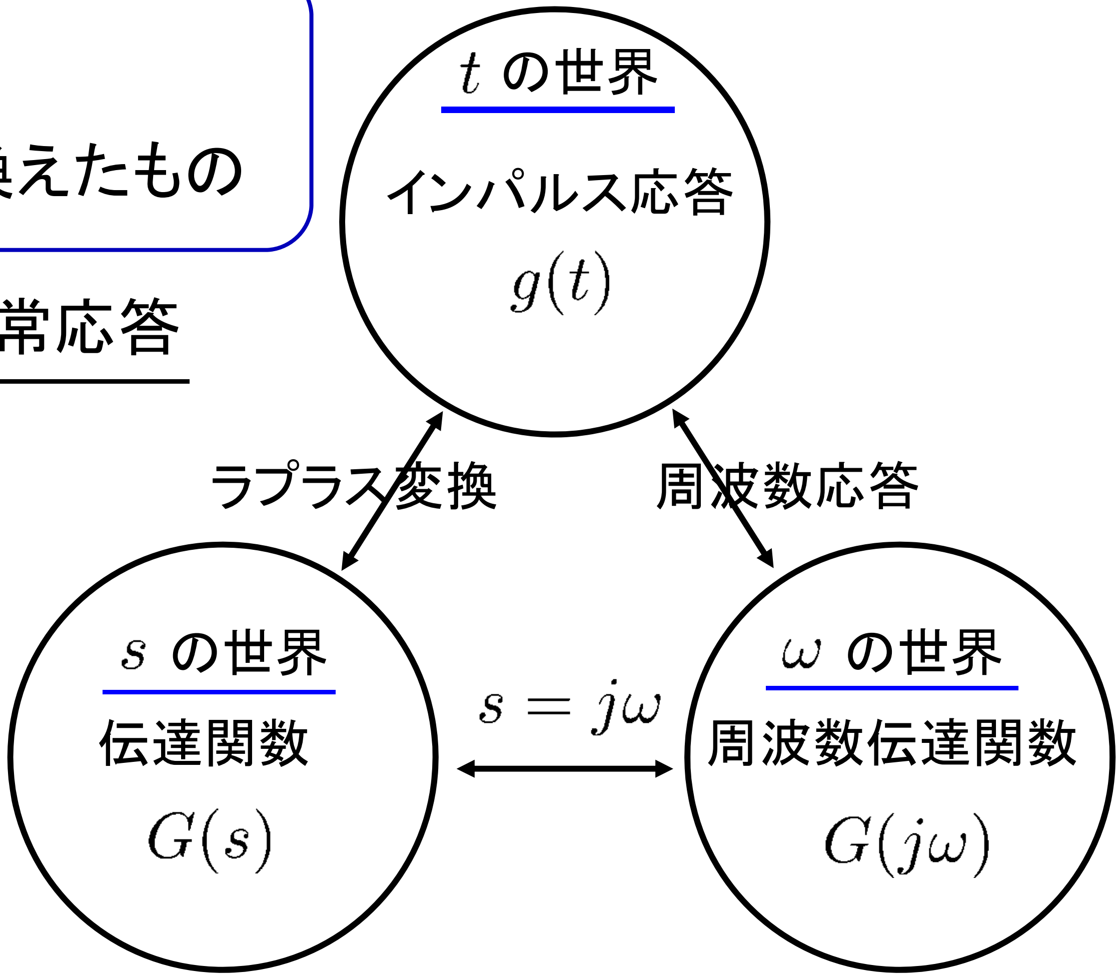


周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$G(s)$ の s を $j\omega$ で置き換えたもの

$$G(j\omega) = \frac{e^{j\omega t} \text{ に対する定常応答}}{e^{j\omega t}}$$

$$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega)$$



- 実用的な制御系の解析・設計に役立つ。
- 実験的に測定し，求めることができる。
- 不安定系でも（形式的に）定義できる。

第 5 章：周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード：周波数伝達関数，ゲイン，位相

学習目標：システムの周波数応答特性を理解する。