

第 5 章 : 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

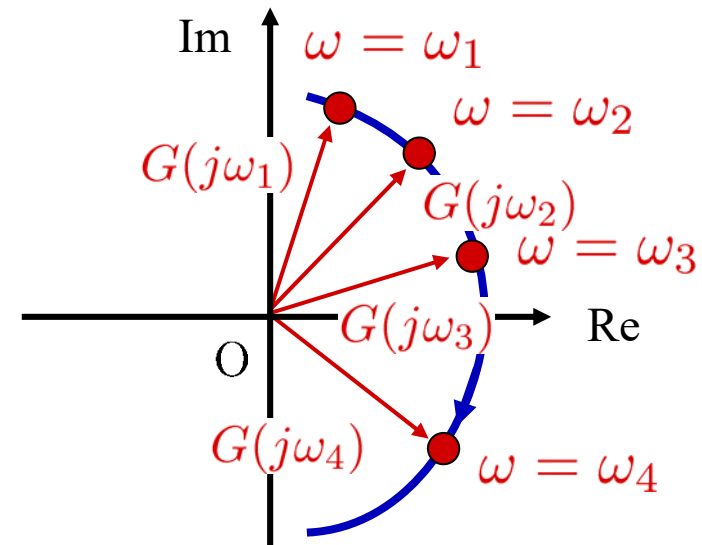
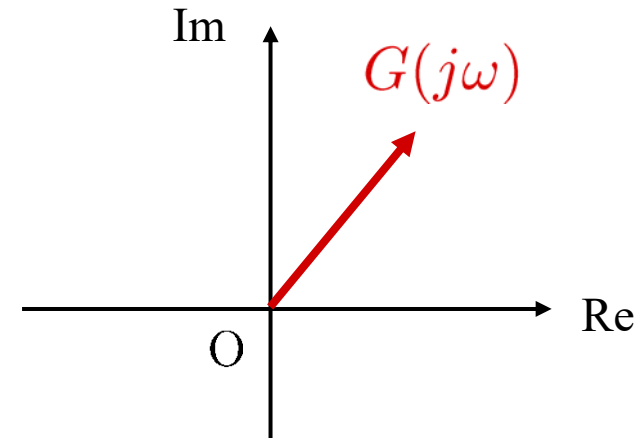
学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。

5 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

周波数 ω を一つ定めると,
 $G(j\omega)$ はある複素平面上の
ベクトルとして表せる.

ω を $0 \sim +\infty$ と変化させると
 $G(j\omega)$ は軌跡を描く



ベクトル軌跡

積分系 $G(s) = \frac{1}{s}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega|} = \frac{1}{|\omega|}$

位相

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle \frac{1}{j\omega} = \angle \frac{1}{j} = \underbrace{\angle 1}_{=0} - \angle j \\ &= -\angle j = -90^\circ \\ &\quad \text{+方向に位相を考える} \end{aligned}$$

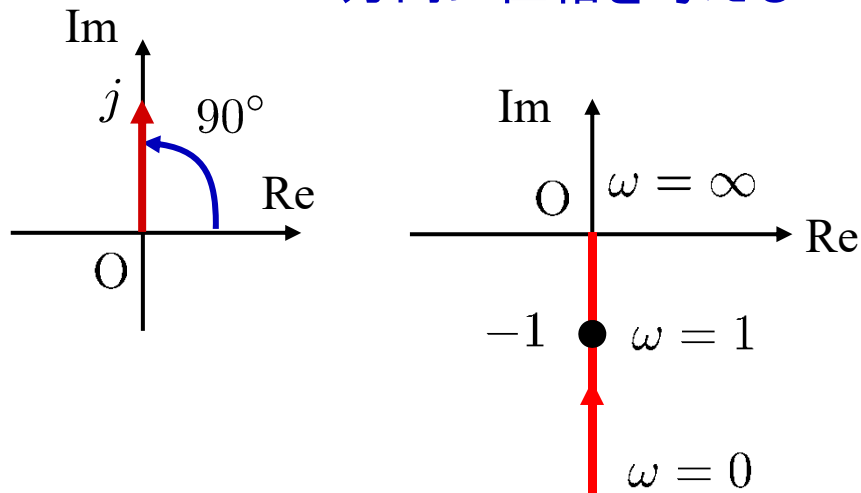


図 5.3 $G(s) = \frac{1}{s}$ のベクトル軌跡

2重積分系 $G(s) = \frac{1}{s^2}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2}$

位相 $\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle \frac{1}{j^2} = \angle 1 - \angle j^2 \\ &= 0 - \angle(-1) = -180^\circ \\ &\quad \text{+方向に位相を考える} \end{aligned}$

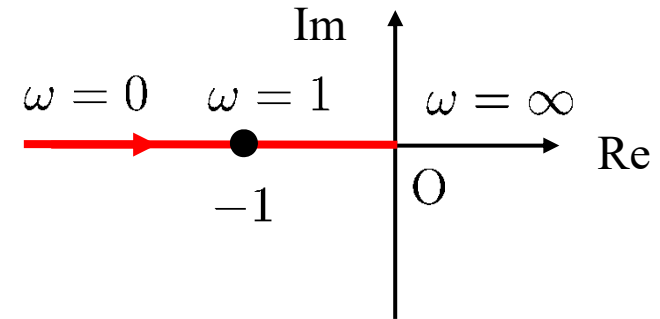
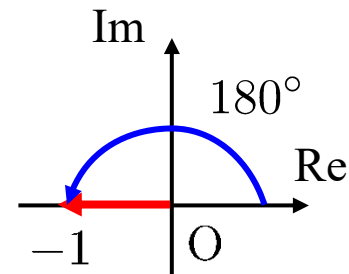


図 5.3 $G(s) = \frac{1}{s^2}$ のベクトル軌跡

積分系と位相遅れ

$\times \frac{1}{s}$: -90° 回転

90° 位相が遅れる

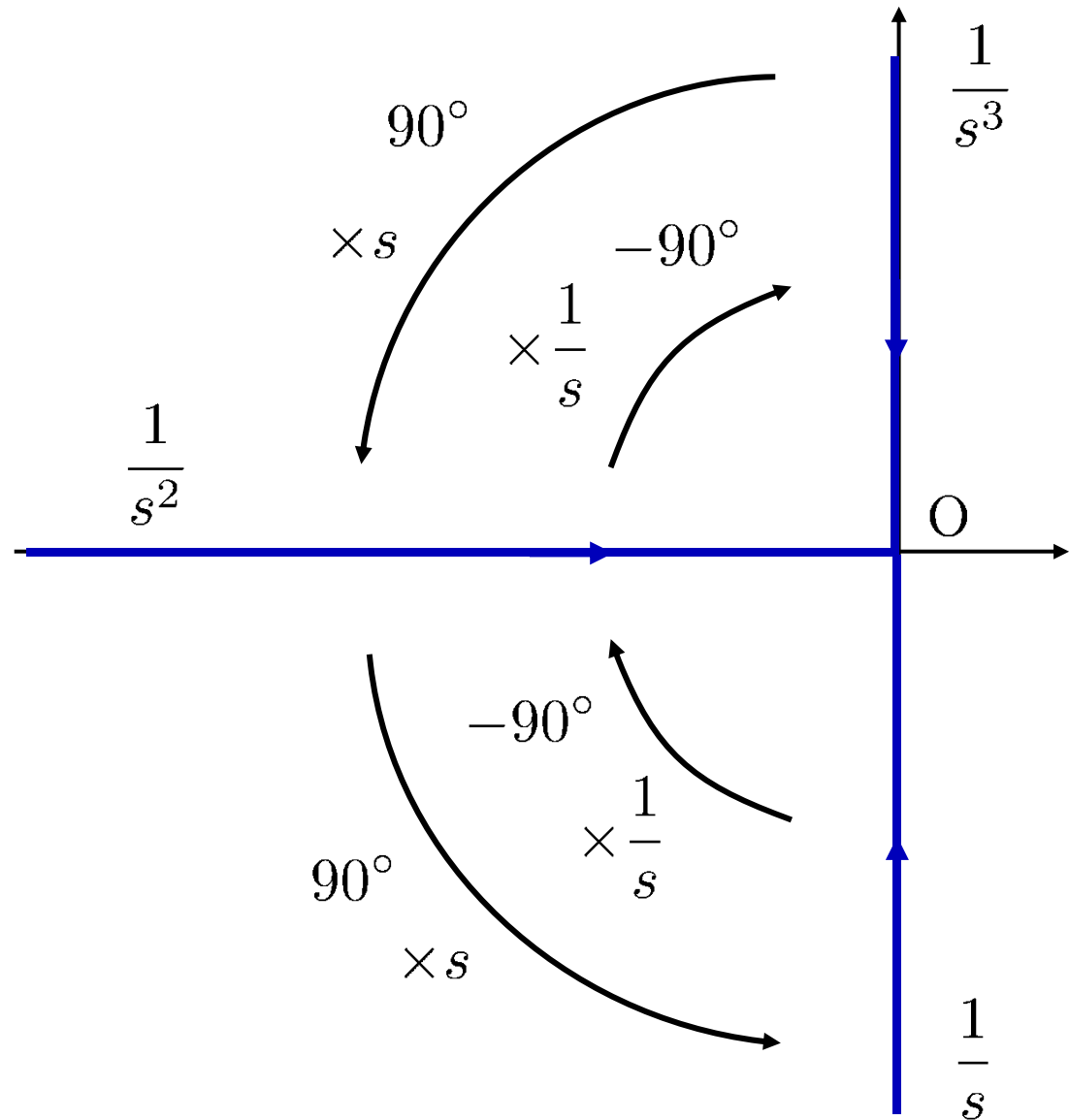
微分系と位相進み

$\times s$: 90° 回転

90° 位相が進む

動的システム

振幅と位相



1 次系 $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ ($K = 1$)

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega T|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

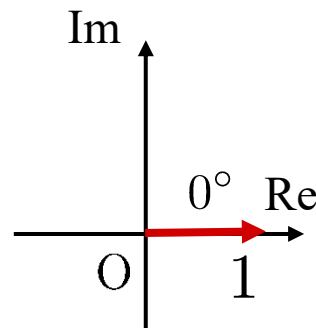
位相

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = \underbrace{\angle 1}_{= 0^\circ} - \angle(1 + j\omega T) = -\angle(1 + j\omega T)$$

$\omega T = 0$ のとき

$$|G(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

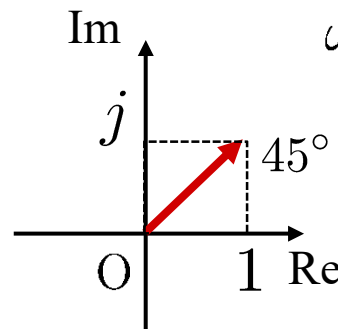
$$\angle G(0) = -\angle 1 = 0^\circ$$



$\omega T = 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j) = -45^\circ$$



$\omega T \approx \infty$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = 0$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\infty) = -90^\circ$$

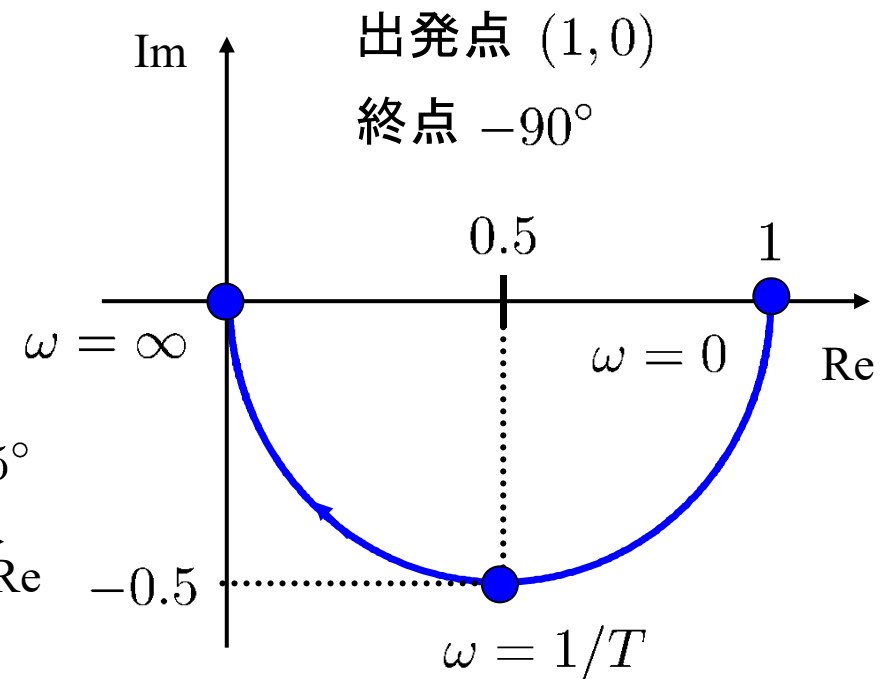
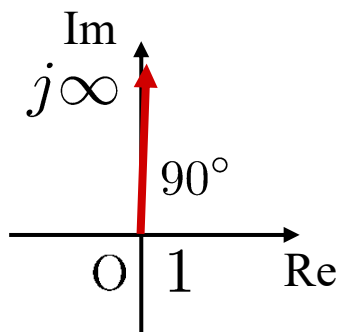


図 5.4 1 次系のベクトル軌跡

$\omega T = 0$	$ G = 1$	$\angle G = 0^\circ$
$\omega T = 1$	$ G = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\angle G = -45^\circ$
$\omega T \approx \infty$	$ G \approx 0$	$\angle G \approx -90^\circ$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{0.5(1 + j\omega T) + 0.5(1 - j\omega T)}{1 + j\omega T}$$

$$= \underline{0.5} + \underline{0.5 \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}}$$

中心 (0.5, 0)

半径 0.5 の
(半)円周上を動く

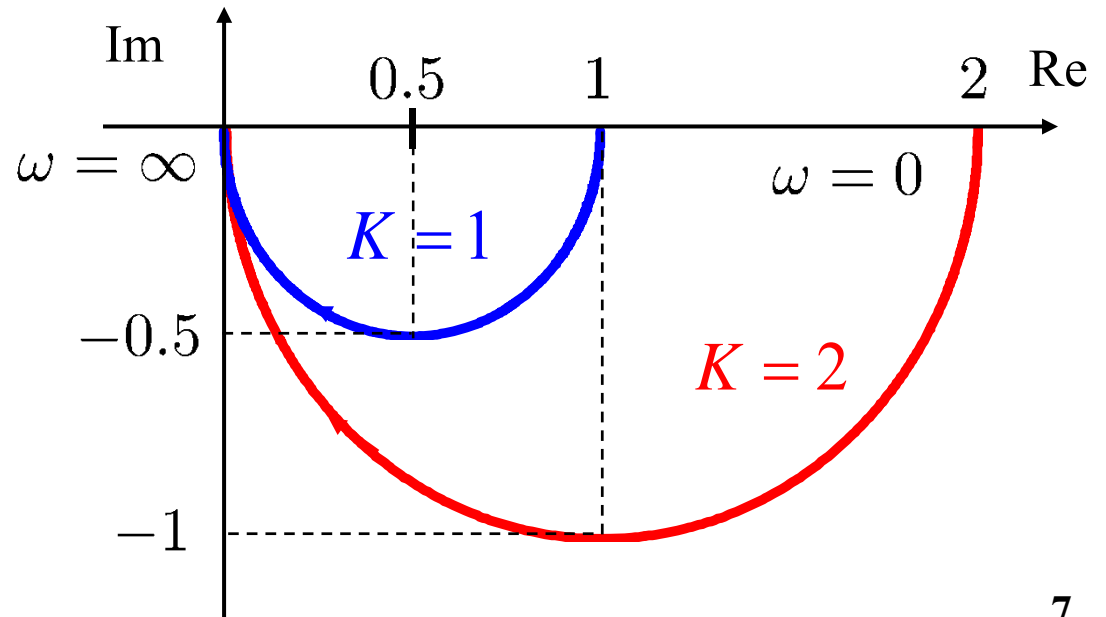
実軸の正方向
に 0.5 平行移動

$$0.5 \cdot \frac{|1 - j\omega T|}{|1 + j\omega T|} = 0.5, \quad \forall \omega$$

半径 0.5 の円周

$\frac{K}{Ts + 1}$ の場合

ゲイン K をかけると
原点を中心として K 倍に
拡大(縮小)される



2次系 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, (K = 1)$

周波数伝達関数

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j + 1} \\ &= \frac{1}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\Omega j + 1}, \quad \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}\right) \end{aligned}$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle ([1 - \Omega^2] + j[2\zeta\Omega]) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2}$$

出発点 $(1, 0)$

終点 -180°

$\Omega = 0$	$ G = 1$	$\angle G = (-0^\circ) = 0^\circ$
$\Omega = 1$	$ G = \frac{1}{2\zeta}$	$\angle G = -90^\circ$
$\Omega \approx \infty$	$ G \approx 0$	$\angle G \approx -180^\circ$

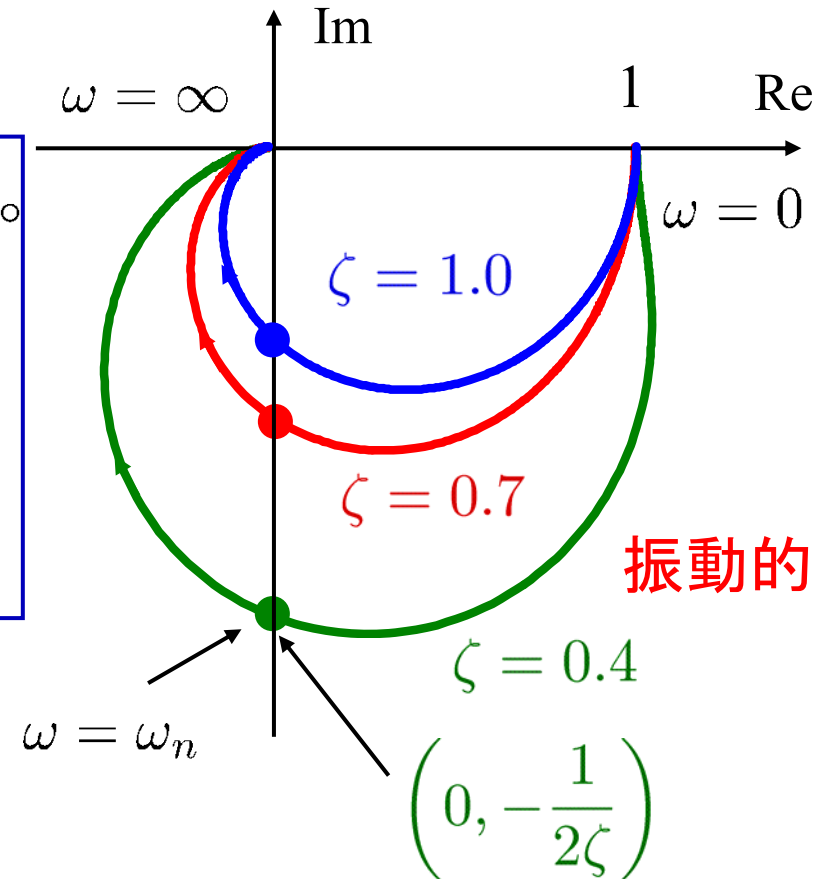
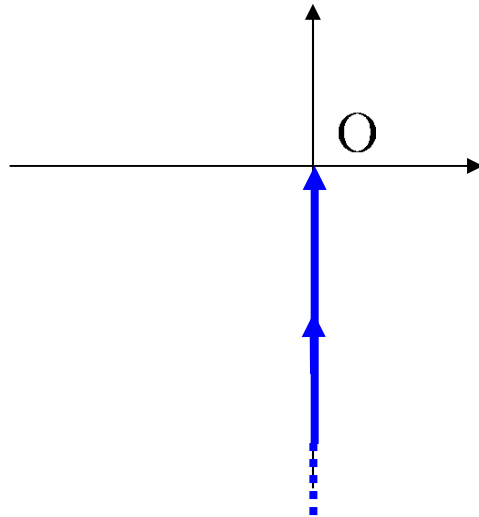


図 5.5 2次系のベクトル軌跡

ベクトル軌跡の出発点と終点

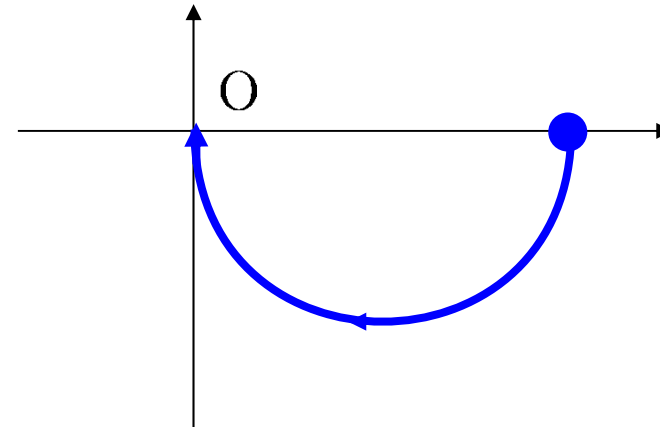
積分系

$$\frac{1}{s}$$



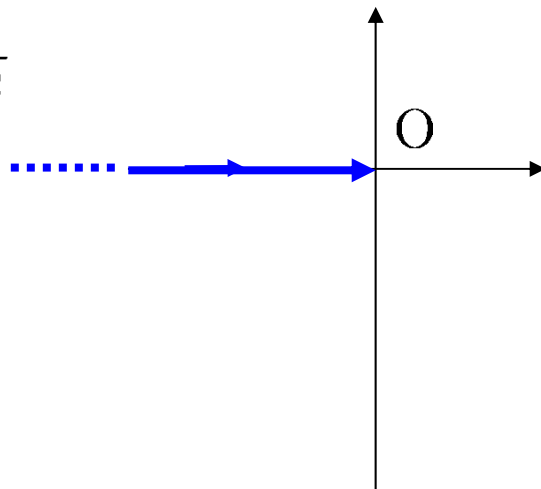
1次系

$$\frac{1}{Ts + 1}$$



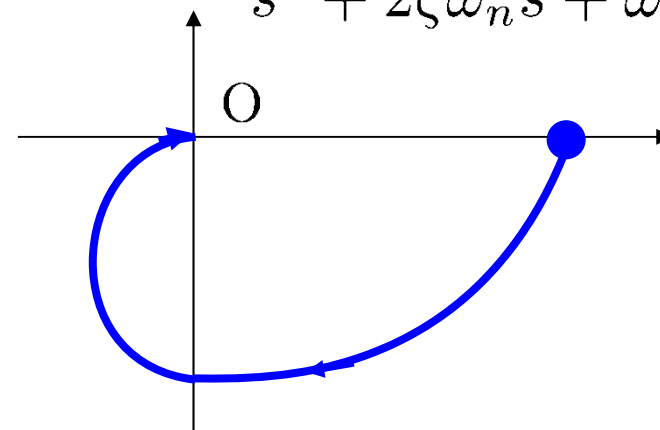
2重積分系

$$\frac{1}{s^2}$$



2次系

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



高次系 $G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (n > m)$

出発点

ゲイン

原点 ($s = 0$) に極をもたないとき

$$\underline{G(0) = \frac{b_0}{a_0}} \quad (a \neq 0)$$

原点に l 位の極をもつとき

$$\omega \rightarrow 0 \text{ のとき } |G(j\omega)| \rightarrow \infty$$

位相

$$\angle G(j\omega) \rightarrow \angle \frac{b_0}{(j\omega)^l} = \angle \frac{1}{j^l} \cdot \frac{b_0}{\omega^l}$$

$$= \underline{(b_0 \text{ の符号}) \times l \times (-90^\circ)}$$

この方向の無限遠方から出発する

終点

ゲイン

終点 $\omega \rightarrow \infty$ のとき

$$\underline{G(j\omega) = 0} \quad (n > m)$$

位相

$$\angle G(j\omega) \approx \angle \frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}}$$

$$= \underline{(b_m \text{ の符号})}$$

$$\underline{\times (n - m) \times (-90^\circ)}$$

この方向から原点に向う

(例) 原点 ($s = 0$) に極をもたないとき

× $G(s) = s$ × $G(s) = \frac{1}{s}$

○ $G(s) = \frac{1}{s+1}$

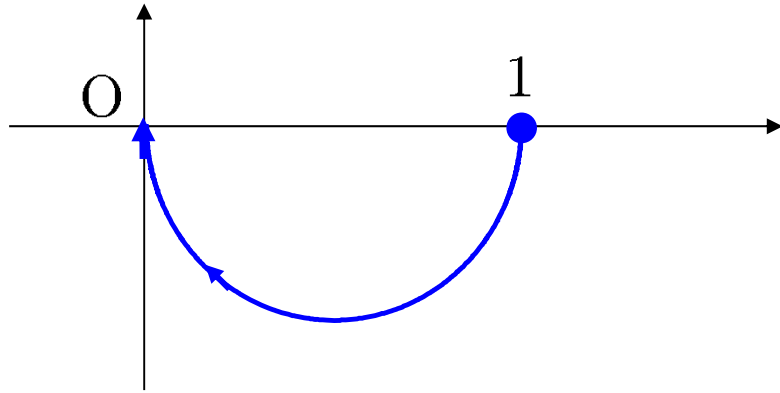
(例) 原点に l 位の極をもつとき

× $G(s) = s$ ○ $G(s) = \frac{1}{s}$

× $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ○ $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

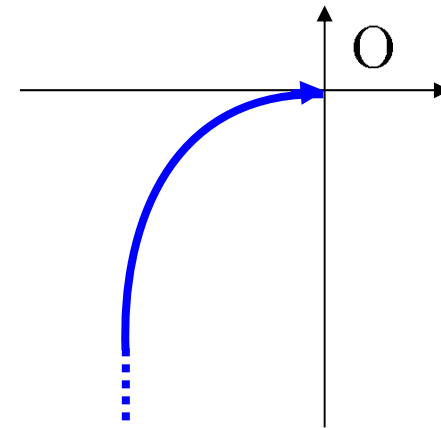
原点 ($s = 0$) に極をもたないとき

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (n - m = 1, l = 0)$$



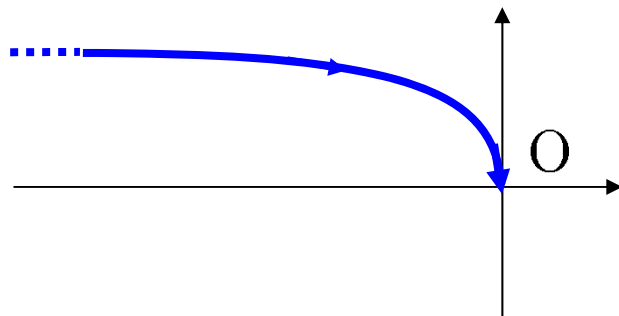
原点に1位の極をもつとき

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (n - m = 2, l = 1)$$



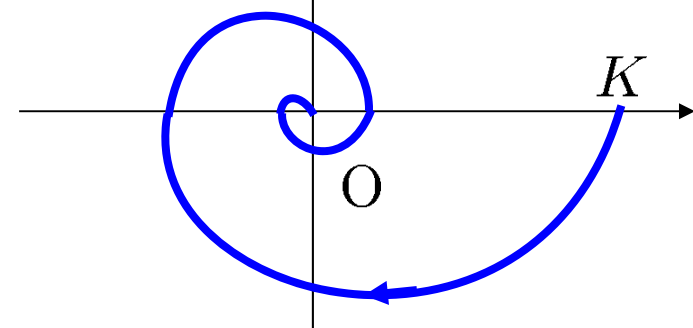
原点に2位の極をもつとき

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \quad (n - m = 3, l = 2)$$



むだ時間を含む系

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-Ls}$$



第 5 章 : 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。