第 5 章 :周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : 最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標 : 最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

ボード線図の利点

極形式で表示

［アイデア］ ゲイン : 対数スケール
位相 : 線形スケール

$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$ （直列結合）

$G_i(j\omega) = r_i e^{j\theta_i} \quad (i = 1 \sim 3)$ とおく

$$G(j\omega) = \left(r_1 e^{j\theta_1}\right)\left(r_2 e^{j\theta_2}\right)\left(r_3 e^{j\theta_3}\right)$$
$$= \underbrace{r_1 r_2 r_3}_{=r} e^{j\underbrace{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}_{=\theta}}$$
$$= re^{j\theta}$$

$$G(j\omega) = re^{j\theta} = r_1 r_2 r_3 e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log r = 20\log(r_1 r_2 r_3)$$
$$= 20\log r_1 + 20\log r_2 + 20\log r_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3} 20\log r_i = \sum_{i=1}^{3} 20\log|G_i(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \theta_i = \sum_{i=1}^{3} \angle G_i(j\omega)$$

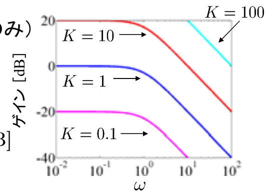
直列結合のとき，ゲインと位相を単純に加えあわせればよい

ゲイン K 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

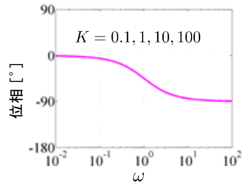
$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (T = 1)$$

$K = 0.1$
+20 [dB] (×10)
$K = 1$
+40 [dB] (×100)
$K = 10$

$$G_1(j\omega) = \frac{0.1}{1 + j\omega}$$
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = 10G_1$$
$$|G_2| = 20\log 10 + 20\log G_1$$
$$\angle G_2 = \angle 10 + \angle G_1 = \angle G_1$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

[例 5. 1]

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)} = G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)\cdot G_4(s)$$
$$= 10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.1s+1}\cdot(s+1)$$

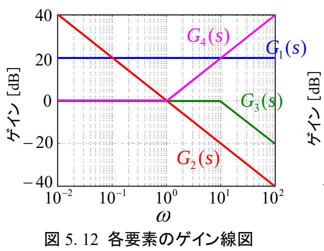


図 5. 12 各要素のゲイン線図
（折れ線近似）

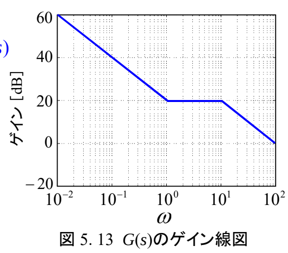


図 5. 13 G(s)のゲイン線図
（折れ線近似）

5 周波数応答
5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

［ 例 ］ $G_1(s) = \dfrac{1+s}{s^2+s+1}, \quad G_2(s) = \dfrac{1-s}{s^2+s+1}$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$
$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$

同じ

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$
$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

異なる

$\omega = 0$

$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$

$\omega \to \infty$

$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$

$= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$

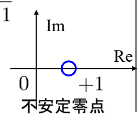
$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$

$= \underline{-90^\circ} - 180^\circ = -270^\circ$

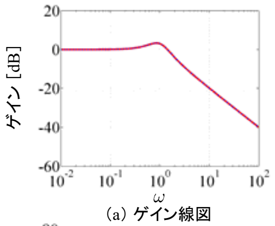
不安定零点の場合
位相の取り方に注意

位相が遅れる

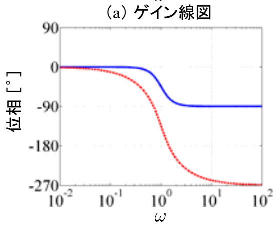
$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$



不安定零点



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

7

最小位相系　安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

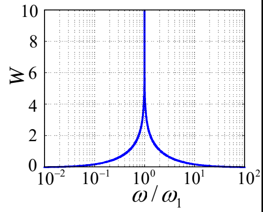
ゲインから位相が一意に定まる．
（ボードのゲイン－位相関係式）

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dM}{du}W du \quad (^\circ)\ \text{度}$$

$u = \ln(\omega/\omega_1)$　正規化角周波数

$M = \ln|G(j\omega)|$　対数ゲイン

$W = \ln(\coth(|u|/2))$　重み関数



$\dfrac{dM}{du}$　横軸，縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W du = \frac{\pi^2}{2} \quad (\omega = \omega_1 \text{ でピーク})$$

8

（dM/du 一定のとき）

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W du$$

$$= \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du} \times 90^\circ$$

$$= n \times 90^\circ$$

$\underline{n = -1\text{のとき}}$

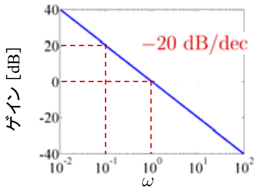
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -1$

とすると

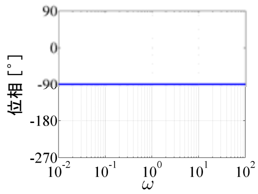
-20 dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$

積分系

1 次系（高周波域）



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

9

$\underline{n = -2\text{ のとき}}$

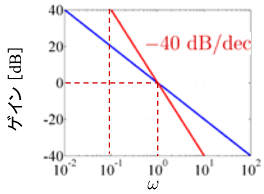
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -2$

とすると

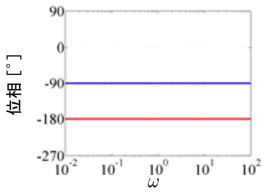
-40 dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$

2 重積分系

2 次系（高周波域）



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

10

ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる．
- 折れ線近似が容易で，システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる．
- 最小位相系では，ゲイン曲線から位相曲線の概略がわかる．
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える．
- 実験データからボード線図を描くことも容易である．

11

むだ時間要素

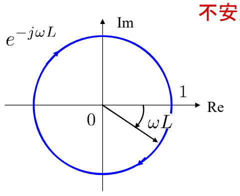
$G(s) = e^{-sL}$

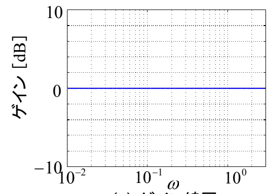
パデー近似

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2}$$

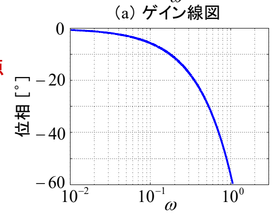
$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2 + (Ls)^2/12}{1 + Ls/2 + (Ls)^2/12}$$

不安定零点





(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

12

第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : 最小位相系, ゲインー位相関係式

学習目標 : 最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

13