

# 第6章：フィードバック制御系の安定性

## 6.1 フィードバック制御系の内部安定性

キーワード：内部安定性，特性多項式

学習目標：フィードバック制御系の内部安定性について理解する。

## 6 フィードバック制御系の安定性

### 6.1 フィードバック制御系の内部安定性

$P(s)$  : 厳密にプロパード ( $P(\infty) = 0$ )

分母の次数が分子の次数より大きい

$K(s)$  : プロパード ( $|K(\infty)| < \infty$ )

#### [例 6.1] 不安定な極零相殺

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$$

$$P(s)K(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s} = \frac{1}{s}$$

$d = 0$  のとき

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} \cdot r(s) = \frac{\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s}} \cdot r(s) = \frac{1}{s+1} \cdot r(s)$$

安定？

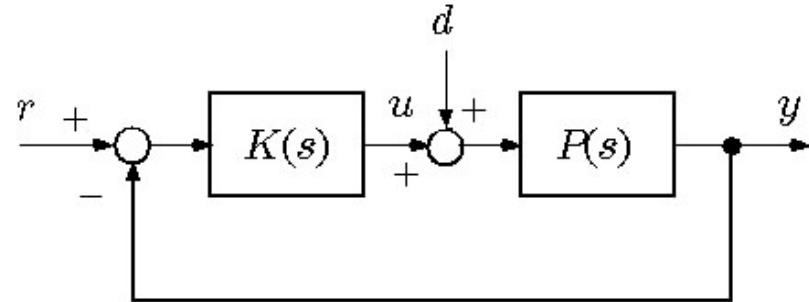
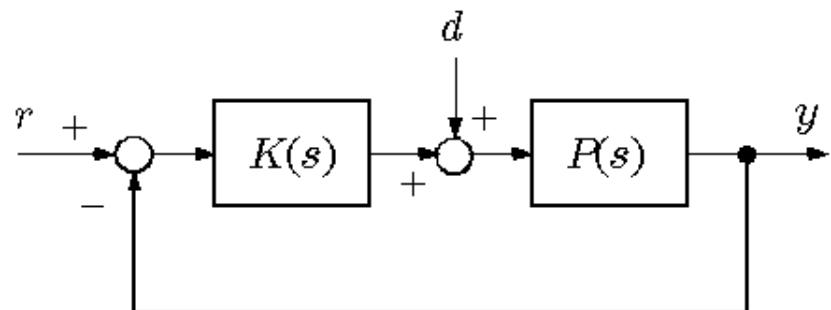


図 6.1 フィードバック制御系



$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow (s-1)y(s) = u(s)$$

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

初期値  $y_0$  を考慮

$$(sy(s) - y_0) - y(s) = u(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{s-1}u(s) + \frac{1}{s-1}y_0$$

$$u(s) = K(s)(r(s) - y(s)), \quad K(s) = \frac{s-1}{s} \text{ より}$$

$$y(s) = \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{s} (r(s) - y(s)) + \frac{1}{s-1}y_0$$

$$(s+1)y(s) = r(s) + \frac{s}{s-1}y_0$$

$$y(s) = \frac{1}{s+1}r(s) + \frac{s}{(s+1)(s-1)}y_0$$

不安定

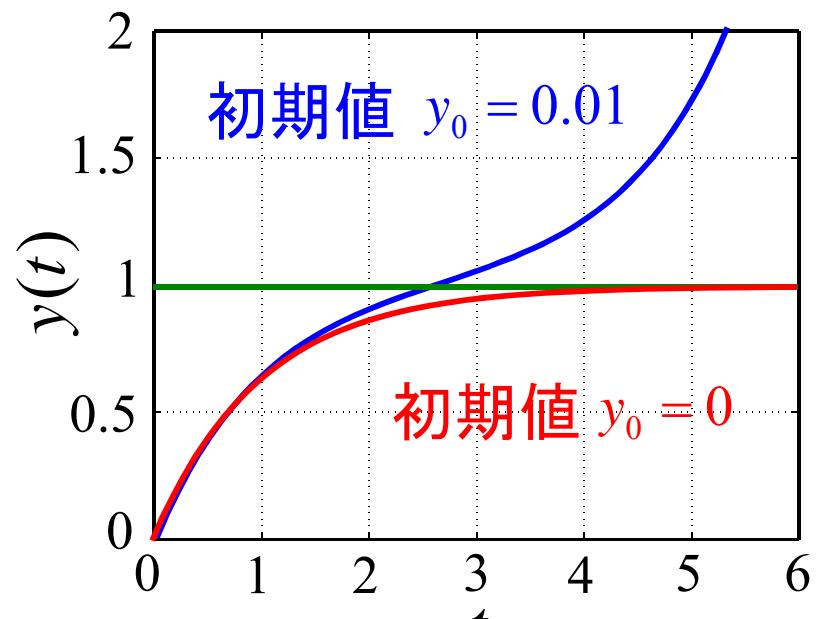


図 6.2 ステップ応答例

## 内部安定性

外部から加わる信号  $\{r(s), d(s)\}$  から各要素の  
出力  $\{u(s), y(s)\}$  への 4 つの伝達関数がすべて安定

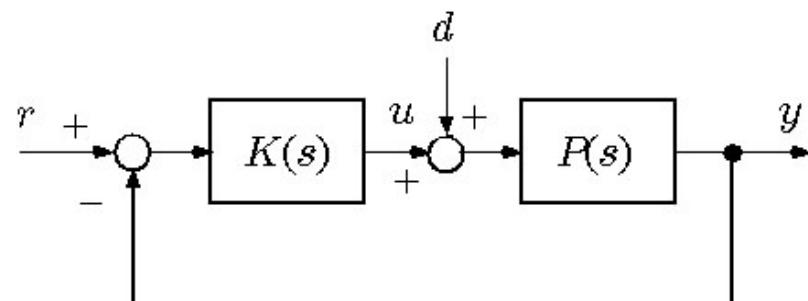
$G_{yr}$  だけでは不十分

$$G_{ur}(s) = \frac{K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$G_{ud}(s) = \frac{-P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}$$



$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{D_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \quad G_{ud}(s) = \frac{-N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \quad G_{yd}(s) = \frac{N_P(s)D_K(s)}{\phi(s)}$$

$$\underline{\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}$$

特性多項式

[ 定理 ] (内部安定性の必要十分条件)

特性多項式

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

のすべての根の実部が負

[ 例 6.1 ]

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$\phi(s) := (s-1) \cdot s + 1 \cdot (s-1) = \underline{(s-1)(s+1)} = 0$$

不安定

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s-1)(s+1)}}$$

不安定な極零相殺が生じている

## [ 結果 1 ]

$P(s)$  と  $K(s)$  の間に不安定な極零相殺が存在するとき,  
フィードバック制御系は内部安定ではない。

## [ 結果 2 ]

$P(s)$  と  $K(s)$  の間に不安定な極零相殺が存在しないとき,  
以下の三つは等価である

(a) フィードバック制御系が内部安定

(b)  $G_{yr}(s)$  が安定  $\left( G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} \right)$

(c)  $1 + P(s)K(s)$  の零点がすべて安定

## Well-posed (ウェルポーズド)

$$P(s) = \frac{s}{s+1}, \quad K(s) = -1$$

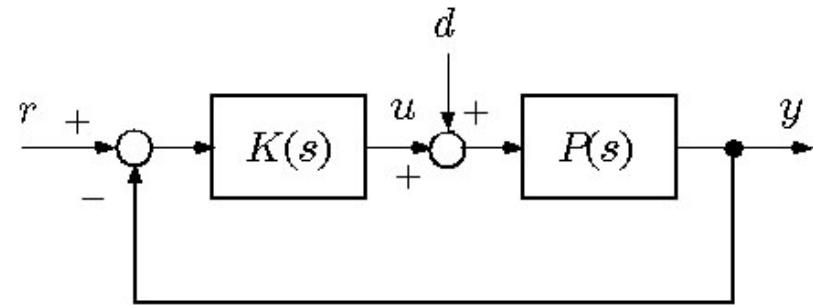


図 6.1 フィードバック制御系

$$G_{ur}(s) = -s - 1, \quad G_{ud}(s) = -G_{yr}(s) = G_{yd}(s) = s$$

プロパーではない

Well-posed

$G_{ur}(s), G_{ud}(s), G_{yr}(s), G_{yd}(s)$  がすべて適切に定義され,  
かつプロパーになるとき, フィードバック系は well-posed である  
といわれる.



必要十分条件  $1 + P(\infty)K(\infty) \neq 0$

# 第6章：フィードバック制御系の安定性

## 6.1 フィードバック制御系の内部安定性

キーワード：内部安定性, 特性多項式

学習目標：フィードバック制御系の内部安定性について理解する。