

2019年度 制御工学 II 後期 第6回講義資料 演習問題(模範解答)

5年 E科 番号 _____ 氏名 _____

[7章演習問題【4】]

次式で与えられる \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \left\{ \tilde{P}(s) | \tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s), |\Delta(s)| \leq 1, \forall \omega \right\}$$

において、ノミナルモデルを $P(s) = \omega_n^2 / (s(s + 2\zeta\omega_n))$, またコントローラを $K = 1$ とする. このとき、不確かさの重み関数がそれぞれ $W_{2A}(s) = \zeta s / (s + \omega_n)$ および $W_{2B}(s) = 5\zeta s / (s + \omega_n)$ の場合について

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)|}, \quad \forall \omega$$

のロバスト安定条件を調べよ.

[解答]

1. $W_{2A}(s) = \zeta s / (s + \omega_n)$ の場合

相補感度関数 $T(s)$ は、 $P(s) = \omega_n^2 / (s(s + 2\zeta\omega_n))$, $K = 1$ より

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned} \quad (1)$$

よって、相補感度関数 $T(s)$ のゲインは、

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| &= \left| \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + \omega_n^2 + 2j\zeta\omega_n\omega} \right| \\ &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

となる.

$\omega = 0$ のとき, $|T(j\omega)| = 1$

$\omega = \omega_n$ のとき, $|T(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta}$

$\omega = \infty$ のとき, $|T(j\omega)| = 0$

一方、不確かさの重み関数は

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left| \frac{j\omega + \omega_n}{j\zeta\omega} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_n^2}}{\zeta\omega} \quad (3)$$

となる. $\omega = 0$ のとき,

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \infty \quad (4)$$

$\omega = \infty$ のとき

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2}}{\zeta\omega} = \frac{1}{\zeta} \quad (5)$$

$\omega = \omega_n$ のとき

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left| \frac{\sqrt{\omega_n^2 + \omega_n^2}}{\zeta\omega_n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \quad (6)$$

となるので,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \quad (7)$$

が常に成立する. よってロバスト安定条件を満たす.

2. $W_{2B}(s) = 5\zeta s / (s + \omega_n)$ の場合

不確かさの重み関数は、

$$\frac{1}{|W_{2B}(j5\omega)|} = \left| \frac{j\omega + \omega_n}{j5\zeta\omega} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_n^2}}{5\zeta\omega} \quad (8)$$

となる. $\omega = 0$ のとき,

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \infty \quad (9)$$

$\omega = \infty$ のとき

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2}}{5\zeta\omega} = \frac{1}{5\zeta} \quad (10)$$

$\omega = \omega_n$ のとき

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \left| \frac{\sqrt{\omega_n^2 + \omega_n^2}}{5\zeta\omega_n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{5\zeta} < \frac{1}{2\zeta} \quad (11)$$

となるので,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} \quad (12)$$

は常には成立しない. よってロバスト安定条件を満たさない.