2019年度 制御工学II 前期 第2回レポート (模範解答)

5年E科 番号＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

【問題1】 伝達関数 $\dfrac{1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$ (ただし，$T_1 > 0$, $T_2 > 0$) のベクトル軌跡について下記の問いに答えよ。
(1) 始点近傍 ($\omega \approx 0$) の実部を求めよ。
(2) 終点 ($\omega = \infty$) と，終点に漸近する軌跡の角度を求めよ。
(3) ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数 ω とその交点を求めよ。

(解答)

(1) 伝達関数 $1/\{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\}$ から周波数伝達関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \\ &= \frac{1}{j\omega(1-\omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1+T_2))} \\ &= \frac{1}{-\omega^2(T_1+T_2)+j\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)} \\ &= \frac{-\omega^2(T_1+T_2)-j\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^4(T_1+T_2)^2+\omega^2(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-\omega(T_1+T_2)-j(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2+\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

よって, $G(j\omega)$ の実部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[G(j\omega)] &= \frac{-\omega(T_1+T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2+\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-(T_1+T_2)}{\omega^2(T_1+T_2)^2+(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

であることがわかる。よって, 始点近傍 $\omega \approx 0$ の実部は

$$\underline{\mathrm{Re}[G(0)] = -(T_1+T_2)} \tag{3}$$

である。

(2) 終点 ($\omega = \infty$) のとき, すなわち ω が十分大きいとき $G(j\omega)$ は,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \\ &\approx \frac{1}{j\omega(j\omega T_1)(j\omega T_2)} = \frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^3} \end{aligned} \tag{4}$$

と近似できる。ゲインは

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^3}\right| = \frac{1}{T_1 T_2 \omega^3} \tag{5}$$

となることから, 終点 ($\omega = \infty$) のゲインは 0 すなわち原点 (0) が終点となる。
　また, この時の軌跡の角度は,

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^3} = \angle \frac{1}{j^3} = -270\,^\circ \tag{6}$$

となり, −270 °の角度で終点に漸近していく。

(3) ベクトル軌跡が実軸と交わるとき, $G(j\omega)$ の虚数部分は 0 となる。よって, 式 (1) より, $G(j\omega)$ の虚部

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \frac{-j(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2+\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \tag{7}$$

が 0 となる条件は,

$$1 - \omega^2 T_1 T_2 = 0 \tag{8}$$

であることから, ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数は

$$\underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}} \tag{9}$$

である。この ω を, 式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{-\omega(T_1+T_2)-j(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2+\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-(T_1+T_2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)^2 (T_1+T_2)^2} \\ &= -\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2} \end{aligned} \tag{10}$$

となることから, 交点は $-T_1 T_2/(T_1+T_2)$ である。また，ベクトル軌跡は図1のようになる。

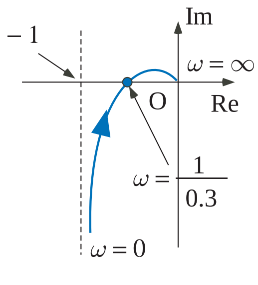

図 1: ベクトル軌跡

【問題 2】 次の伝達関数のベクトル軌跡を描け。

(a) $\dfrac{\sqrt{3}s+1}{s+\sqrt{3}}$

(解答)

ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される.

$$|G(j\omega)| = \frac{|j\sqrt{3}\omega+1|}{|j\omega+\sqrt{3}|} = \sqrt{\frac{3\omega^2+1}{\omega^2+3}} \tag{11}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{j\sqrt{3}\omega+1}{j\omega+\sqrt{3}} \tag{12}$$

$\omega \ll 1$, $\omega = 1$, $\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる.

$\omega \ll 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{3\omega^2+1}{\omega^2+3}} \approx \sqrt{\frac{1}{3}} \tag{13}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{j\sqrt{3}\omega+1}{j\omega+\sqrt{3}} \approx \angle\frac{1}{\sqrt{3}} = 0^\circ \tag{14}$$

$\omega = 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{3\omega^2+1}{\omega^2+3}} = 1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= \frac{j\sqrt{3}\omega+1}{j\omega+\sqrt{3}}\\ &= \angle(j\sqrt{3}\omega+1) - \angle(j\omega+\sqrt{3})\\ &= 60^\circ - 30^\circ\\ &= 30^\circ \end{aligned} \tag{16}$$

$\omega \gg 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{3\omega^2+1}{\omega^2+3}} \approx \sqrt{3} \tag{17}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{j\sqrt{3}\omega+1}{j\omega+\sqrt{3}} \approx \angle\sqrt{3} = 0^\circ$$

よって, 図 2 のようになる。

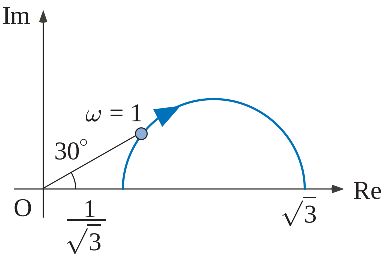

図 2: ベクトル軌跡

(b) e^{-10s}

(解答)

ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される.

$$|G(j\omega)| = \left|e^{-j10\omega}\right| = 1 \tag{18}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(-10\omega) \tag{19}$$

$\omega \ll 1$, $\omega = 1$, $\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる.

$\omega \ll 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = 1 \tag{20}$$

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ \tag{21}$$

$\omega = 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = 1 \tag{22}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(-10) = -180^\circ \tag{23}$$

$\omega \gg 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = 1 \tag{24}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(-10\omega) \tag{25}$$

よって, 図 3 のようになる。

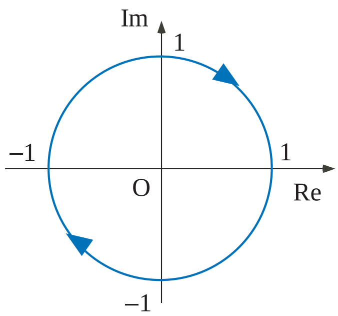

図 3: ベクトル軌跡