2019 年度 制御工学 II 前期 第 4 回レポート (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

[問題 1]　次の伝達関数のボード線図の概形を描け。ただし，ゲイン線図は折れ線近似でよい。

(a) $\dfrac{0.1s+1}{10s+1}$

(解答)

伝達関数は

$$G(s) = \frac{0.1s+1}{10s+1} = (0.1s+1)\cdot\left(\frac{1}{10s+1}\right) \qquad (1)$$

と分解できる。$G_1(s) = 0.1s+1$, $G_2(s) = \dfrac{1}{10s+1}$ と定義すると，$G_1(s)$, $G_2(s)$ はゲイン曲線，位相曲線について次のような折点各周波数をもつことがわかる (教科書 p. 102 参照)。よって，$G_1(s)$，$G_2(s)$ を重ね合わせればボード線図が図 1 のようになる。

伝達関数	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	0.1	10	2	50
$G_2(s)$	10	0.1	0.02	0.5

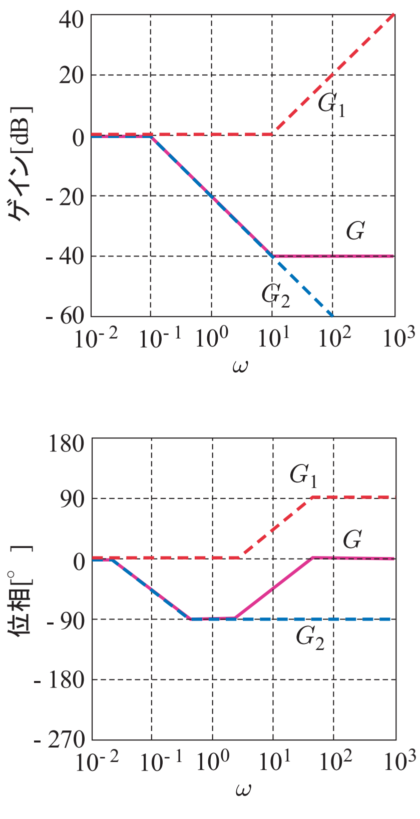

図 1: (a) のボード線図

(b) $\dfrac{10s+1}{0.1s+1}$

(解答)

伝達関数は

$$G(s) = \frac{10s+1}{0.1s+1} = (10s+1)\cdot\left(\frac{1}{0.1s+1}\right) \qquad (2)$$

と分解できる。$G_1(s) = 10s+1$, $G_2(s) = \dfrac{1}{0.1s+1}$ と定義すると，$G_1(s)$, $G_2(s)$ はゲイン曲線，位相曲線について次のような折点各周波数をもつことがわかる (教科書 p. 102 参照)。よって，$G_1(s)$，$G_2(s)$ を重ね合わせればボード線図が図 2 のようになる。

伝達関数	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	10	0.1	0.02	0.5
$G_2(s)$	0.1	10	2	50

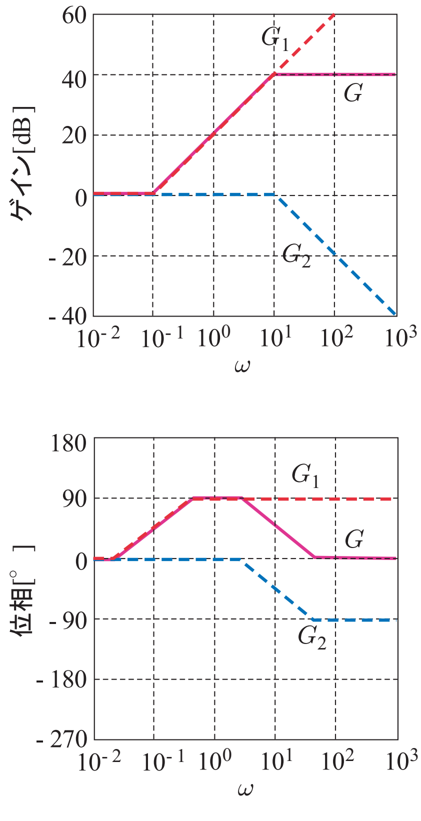

図 2: (b) のボード線図

[問題 2] 次の伝達関数のゲイン線図を折れ線近似で描け。

$$\frac{s+1}{s(s+10)}$$

(解答) 伝達関数は

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}\cdot(s+1)\cdot\frac{1}{0.1s+1} \tag{3}$$

と分解できる。$G_1(s) = \frac{1}{10}$, $G_2(s) = \frac{1}{s}$, $G_3(s) = s+1$, $G_4(s) = \frac{1}{0.1s+1}$ と定義すると，ゲイン曲線について表 5(教科書 p. 102) を参照するとボード線図が図 3 のようになる。

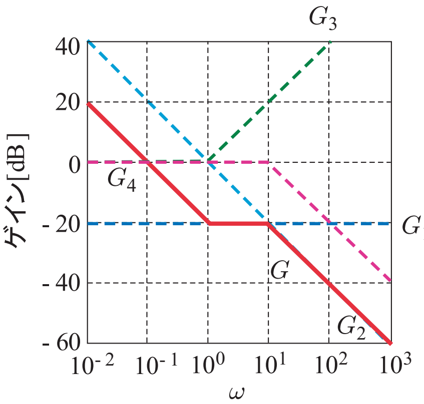

図 3: ボード線図

[問題 1 の別解]

周波数伝達関数は，次のようになる。

$$G(j\omega) = \frac{1+j0.1\omega}{1+j10\omega} \tag{4}$$

ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される.

$$|G(j\omega)| = \frac{|1+j0.1\omega|}{|1+j10\omega|} = \sqrt{\frac{1+0.01\omega^2}{1+100\omega^2}} \tag{5}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j0.1\omega) - \angle(1+j10\omega) \tag{6}$$

$\omega \ll 1$，$\omega = 1$，$\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる。

$$\omega \ll 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{1+0.01\omega^2}{1+100\omega^2}} \approx 20\log 1 = 0$$

$$\angle G = \angle 1 - \angle 1 = 0$$

$$\omega = 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{1.01}{101}} = 20\log\sqrt{\tfrac{1}{100}} = 20\log 10^{-1} = -20$$

$$\angle G = \angle(1+j0.1) - \angle(1+j10) = \tan^{-1}(0.1) - \tan^{-1}(10) = 5.7 - 84.3 = -78.6\ ^\circ$$

$$\omega \gg 1 \quad 20\log|G| \approx 20\log\sqrt{\frac{0.01}{100}} = 20\log\frac{1}{100} = 20\log 10^{-2} = -40$$

$$\angle G = \angle(j0.1\omega) - \angle(j10\omega) = 0$$

よって, 図 1 のようになる。ただし，どこが折点かを探すのは難しい。

[問題 2 の別解]

周波数伝達関数は，次のようになる。

$$G(j\omega) = \frac{1+j10\omega}{1+j0.1\omega} \tag{7}$$

ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される.

$$|G(j\omega)| = \frac{|1+j10\omega|}{|1+j0.1\omega|} = \sqrt{\frac{1+100\omega^2}{1+0.01\omega^2}} \tag{8}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j10\omega) - \angle(1+j0.1\omega) \tag{9}$$

$\omega \ll 1$，$\omega = 1$，$\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる。

$$\omega \ll 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{1+100\omega^2}{1+0.01\omega^2}} \approx 20\log 1 = 0$$

$$\angle G = \angle 1 - \angle 1 = 0$$

$$\omega = 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{101}{1.01}} = 20\log\sqrt{100} = 20\log 10 = 20$$

$$\angle G = \angle(1+j10) - \angle(1+j0.1) = \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(0.1) = 84.3 - 5.7 = 78.6\ ^\circ$$

$$\omega \gg 1 \quad 20\log|G| \approx 20\log\sqrt{\frac{100}{0.01}} = 20\log 100 = 20\log 10^2 = 40$$

$$\angle G = \angle(j10\omega) - \angle(j0.1\omega) = 0$$

よって, 図 2 のようになる。ただし，どこが折点かを探すのは難しい。