2022 年度 制御工学 II 後期 第 5 回レポート (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

問題 1 ([7 章演習問題【4】])
次式で与えられる $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \left\{ \tilde{P}(s) | \tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s),\ |\Delta(s)| \le 1, \quad \forall\omega \right\}$$

において, ノミナルモデルを $P(s) = \omega_n^2/(s(s+2\zeta\omega_n))$, またコントローラを $K = 1$ とする．このとき, 不確かさの重み関数がそれぞれ $W_{2A}(s) = \zeta s/(s+\omega_n)$ および $W_{2B}(s) = 5\zeta s/(s+\omega_n)$ の場合について

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)|}, \quad \forall\omega$$

のロバスト安定条件を調べよ.

[**解答**]

1. $W_{2A}(s) = \zeta s/(s+\omega_n)$ の場合
   相補感度関数 $T(s)$ は, $P(s) = \omega_n^2/(s(s+2\zeta\omega_n))$, $K = 1$ より

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \end{aligned} \tag{1}$$

よって，相補感度関数 $T(s)$ のゲインは,

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| &= \left| \frac{\omega_n^2}{-\omega^2+\omega_n^2+2j\zeta\omega_n\omega} \right| \\ &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

となる. 一方, 不確かさの重み関数は

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left| \frac{j\omega+\omega_n}{j\zeta\omega} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{\zeta\omega} \tag{3}$$

となる。

【解法 1】

$\omega = 0$ のとき,

$$|T(j\omega)| = 1 \tag{4}$$
$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \infty \tag{5}$$

$\omega = \omega_n$ のとき,

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta} \tag{6}$$
$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left| \frac{\sqrt{\omega_n^2+\omega_n^2}}{\zeta\omega_n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \tag{7}$$

$\omega = \infty$ のとき,

$$|T(j\omega)| = 0 \tag{8}$$
$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2}}{\zeta\omega} = \frac{1}{\zeta} \tag{9}$$

となるので,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \tag{10}$$

が常に成立する．よってロバスト安定条件を満たす.

【解法 2】

$$\begin{aligned} & |T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \qquad (11) \\ &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} - \frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{\zeta\omega} \\ &= \frac{\omega_n^2\zeta\omega - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)}}{\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\ &= \frac{\omega_n^2\zeta\omega - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4(\omega^2+\omega_n^2)\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}{\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\omega_n^4\zeta^2\omega^2} - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\omega^4\zeta^2\omega_n^2+4\omega^2\zeta^2\omega_n^4}}{\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\ &< 0 \qquad (12) \end{aligned}$$

よって,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \tag{13}$$

が常に成立するので，よってロバスト安定条件を満たす.

2. $W_{2B}(s) = 5\zeta s/(s+\omega_n)$ の場合

不確かさの重み関数は,

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega+\omega_n}{j5\zeta\omega}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{5\zeta\omega} \tag{14}$$

となる。

【解法1】$\omega = 0$ のとき,

$$|T(j\omega)| = 1 \tag{15}$$

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \infty \tag{16}$$

$\omega = \omega_n$ のとき

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta} \tag{17}$$

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \left|\frac{\sqrt{\omega_n^2+\omega_n^2}}{5\zeta\omega_n}\right| = \frac{\sqrt{2}}{5\zeta} < \frac{1}{2\zeta} \tag{18}$$

$\omega = \infty$ のとき

$$|T(j\omega)| = 0 \tag{19}$$

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2}}{5\zeta\omega} = \frac{1}{5\zeta} \tag{20}$$

となるので,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} \tag{21}$$

は $\omega = \omega_n$ のときに成立しない．よってロバスト安定条件を満たさない.

【解法2】

$$|T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} - \frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{5\zeta\omega} \\
&= \frac{5\omega_n^2\zeta\omega - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)}}{5\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\
&= \frac{5\omega_n^2\zeta\omega - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4(\omega^2+\omega_n^2)\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}{5\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\
&= \frac{\sqrt{25\omega_n^4\zeta^2\omega^2} - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\omega^4\zeta^2\omega_n^2+4\omega^2\zeta^2\omega_n^4}}{5\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}
\end{aligned} \tag{23}$$

$\omega = \omega_n$ のとき

$$|T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{25\omega_n^6\zeta^2} - \sqrt{4\omega_n^6\zeta^2+4\omega_n^6\zeta^2}}{5\zeta\omega\sqrt{4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\
&= \frac{\sqrt{25\omega_n^6\zeta^2} - \sqrt{8\omega_n^6\zeta^2}}{5\zeta\omega\sqrt{4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} > 0
\end{aligned} \tag{25}$$

よって，$\omega = \omega_n$ のとき

$$|T(j\omega)| > \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \tag{26}$$

となるので，ロバスト安定条件を満たさない.