2022 年度 制御工学 II 後期 第 5 回 小テスト (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

問題 1
次式で与えられる $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \left\{ \tilde{P}(s) | \tilde{P}(s) = (1+\Delta(s)W_2(s))P(s),\ |\Delta(s)| \le 1,\quad \forall\omega \right\}$$

において，ノミナルモデルを $P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$，またコントローラを $K = 2$ とする．このとき，不確かさの重み関数が

$$W_2(s) = \frac{s}{s+1} \tag{1}$$

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)|},\quad \forall\omega$$

のロバスト安定条件を調べよ．

[解答]

相補感度関数 $T(s)$ は，$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$，$K = 2$ より

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}} \\ &= \frac{2}{s(s+2)+2} = \frac{2}{s^2+2s+2} \end{aligned} \tag{2}$$

よって，相補感度関数 $T(s)$ のゲインは，

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| &= \left| \frac{2}{-\omega^2+2+2j\omega} \right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{(-\omega^2+2)^2+4\omega^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

となる．よって，$\omega = \sqrt{2}$ のとき最大となる。

- $\omega = 0$

$$|T(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{2^2}} = 1 \tag{4}$$

- $\omega = \sqrt{2}$

$$|T(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{4\times 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

- $\omega = \infty$

$$|T(j\omega)| = 0 \tag{6}$$

不確かさの重み関数は

$$\frac{1}{|W_2(j\omega)|} = \left| \frac{j\omega+1}{j\omega} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega} \tag{7}$$

となる。

- $\omega = 0$

$$\frac{1}{|W_2(j\omega)|} = \infty > 1 = |T(0| \tag{8}$$

- $\omega = \infty$

$$\frac{1}{|W_2(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2}}{\omega} = 1 > 0 = |T(\infty)| \tag{9}$$

- $\omega = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|W_2(j\omega)|} &= \left| \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{2}} = |T(j\sqrt{2})| \end{aligned} \tag{10}$$

となるので，

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \tag{11}$$

は成立する．よってロバスト安定条件を満たす．図 1 は，実線が $|T|$，破線が $\left|\frac{1}{W_2}\right|$ を示す。

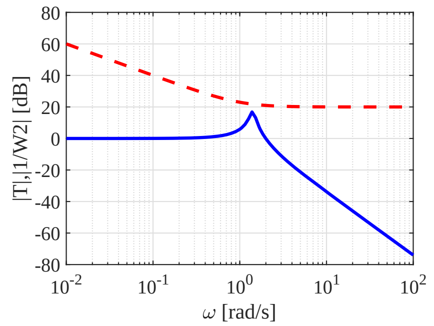

図 1: $|T(s)|$, $\left|\frac{1}{W_2(s)}\right|$ のボード線図