2022 年度 制御工学 II 後期 第 6 回レポート (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

[問題 1](7 章演習問題 【5】)
ノミナルモデルが $P(s) = 1/s$, コントローラが $K = 1$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) 不確かさの重み関数が $W_2(s) = s/1.5$ のとき, $|W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \forall\omega$ のロバスト安定条件を調べよ.

(b) 制御性能の重み関数が $W_1(s) = 1/1.5s$ のとき, $|W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1, \forall\omega$ のノミナル性能条件を調べよ.

(c) 上の (a), (b) で与えられた重み関数 $W_1(s)$, $W_2(s)$ に対し, $|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \forall\omega$ のロバスト性能条件を調べよ.

[解答]

(a) ノミナルモデル $P(s) = 1/s$, コントローラ $K = 1$ より相補感度関数は

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{1}{s}\cdot 1}{1 + \frac{1}{s}\cdot 1} = \frac{1}{s+1} \quad (1)$$

であるので,

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left|\frac{j\omega}{1.5}\frac{1}{j\omega+1}\right| = \frac{\omega}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} < 1 \quad (2)$$

となる。よって,

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad (3)$$

であるので，ロバスト安定である。

(b) ノミナルモデル $P(s) = 1/s$, コントローラ $K = 1$ より感度関数は

$$S(s) = \frac{1}{1+PK} = \frac{1}{1+\frac{1}{s}\cdot 1} = \frac{s}{s+1} \quad (4)$$

であるので,

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)S(j\omega)| &= \left|\frac{1}{1.5j\omega}\frac{j\omega}{1+j\omega}\right| = \left|\frac{1}{1.5(j\omega+1)}\right| \\ &= \frac{1}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。よって

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1 \quad (6)$$

であるので，ノミナル性能条件を満たす。

(c) (a), (b) より

$$\begin{aligned} &|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| \\ &= \frac{1}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} + \frac{\omega}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{\omega+1}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} \end{aligned} \quad (7)$$

である。これを ω について微分すると

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega+1}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = \frac{d}{d\omega}(\omega+1)(\omega^2+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\omega^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (\omega+1)\left(-\frac{1}{2}\right)2\omega(\omega^2+1)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-\omega(\omega+1)}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\omega^2+1}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-\omega(\omega+1)}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\frac{1-\omega}{\omega^2+1} \end{aligned} \quad (8)$$

となるので，(7) 式 は $\omega < 1$ で増加し, $\omega > 1$ で減少する。よって, (7) 式 は $\omega = 1$ で最大となることがわかる．$\omega = 1$ を (7) 式 に代入すると

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$$

となるので，ロバスト性能条件を満たす。次の図 1 に $|W_1S|$ を一点鎖線で, $|W_2T|$ を破線で, $|W_1S| + |W_2T|$ を実線でそれぞれ示す。

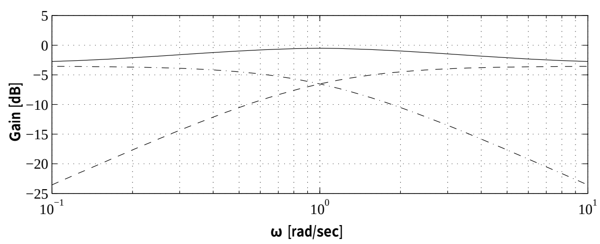

図 1: $|W_1S|$, $|W_2T|$, $|W_1S| + |W_2T|$ の周波数特性