2022 年度 制御工学 II 後期 第 6 回小テスト (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

[問題 1](7 章演習問題 【5】)
ノミナルモデル $P(s)$，コントローラ $K(s)$， 不確かさの重み関数 $W_2(s)$，制御性能の重み関数 $W_1(s)$ が以下で与えられるとき, 次のロバスト性能条件を満たすか答えよ。

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1,\ {}^{\forall}\omega$$

$$P(s) = \frac{1}{2s},\quad K(s) = 4,\ W_2(s) = \frac{s}{4},\quad W_1(s) = \frac{1}{s}$$

ただし，下記の値を用いてよい。

$$T(s) = \frac{2}{s+2},\quad S(s) = \frac{s}{s+2} \tag{1}$$

[解答]

相補感度関数は

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{\frac{1}{2s}\cdot 4}{1+\frac{1}{2s}\cdot 4} \\ &= \frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{2}{s}} = \frac{2}{s+2} \end{aligned} \tag{2}$$

であるので,

$$\begin{aligned} |W_2(j\omega)T(j\omega)| &= \left|\frac{j\omega}{4}\frac{2}{j\omega+2}\right| = \left|\frac{j\omega}{2(j\omega+2)}\right| \\ &= \frac{\omega}{2\sqrt{\omega^2+4}} < 1 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。

感度関数は

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2s}\cdot 4} \\ &= \frac{1}{1+\frac{2}{s}} = \frac{s}{s+2} \end{aligned} \tag{4}$$

であるので,

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)S(j\omega)| &= \left|\frac{1}{j\omega}\frac{j\omega}{j\omega+2}\right| = \left|\frac{1}{j\omega+2}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}} < 1 \end{aligned} \tag{5}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} &|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| \\ &= \frac{\omega}{2\sqrt{\omega^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}} \\ &= \frac{\omega+2}{2\sqrt{\omega^2+4}} \end{aligned} \tag{6}$$

である。これを ω について微分して整理すると

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega+2}{\sqrt{\omega^2+4}}\right) \\ &= \frac{d}{d\omega}(\omega+2)\left(\omega^2+4\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\omega^2+4\right)^{-\frac{1}{2}} + 2(\omega+2)\left(-\frac{1}{2}\right)(4\omega)\left(\omega^2+4\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}} - \omega(\omega+2)\frac{1}{(\omega^2+4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(\omega^2+4)-\omega^2-2\omega}{(\omega^2+4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2(2-\omega)}{(\omega^2+4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

となるので，(6) 式 は $\omega < 2$ で増加し, $\omega > 2$ で減少する。よって, (6) 式 は $\omega = 2$ で最大となることがわかる．$\omega = 2$ を (6) 式に代入すると

$$\begin{aligned} &|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| \\ &= \frac{2+2}{2\sqrt{4+4}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{< 1} \end{aligned}$$

となるので，ロバスト性能条件を満たす。次の図 1 に $|W_1S|$ を一点鎖線で, $|W_2T|$ を破線で, $|W_1S|+|W_2T|$ を実線でそれぞれ示す。

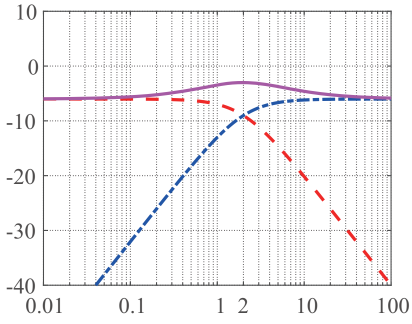

図 1: $|W_1S|$, $|W_2T|$, $|W_1S|+|W_2T|$ の周波数特性