2022 年度 制御工学 II 第 1 回レポート (模範解答)

5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

【章末問題 1】　伝達関数が $G(s) = 1/(s-1)$ の (不安定な) システムに入力 $u(t) = \sin t$ を加えたときの出力 $y(t)$ を計算せよ。

(解答)

伝達関数 $G(s) = 1/(s-1)$ は不安定のため，ゲインと位相からでは計算できない。

仮想的な複素数の入力 $u(t) = e^{jt} = \cos t + j\sin t$ を考える。このとき，出力は

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s-j}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-j}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s-1}\right]\frac{1}{-1+j} \\
&= \left(e^{jt} - e^{t}\right)\frac{1}{-1+j} \\
&= \frac{1}{-1+j}e^{jt} - \frac{1}{-1+j}e^{t} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，図 1 から

$$
\underline{\angle\frac{1}{-1+j} = -\angle(-1+j) = -\frac{3}{4}\pi} \qquad (2)
$$

となる。

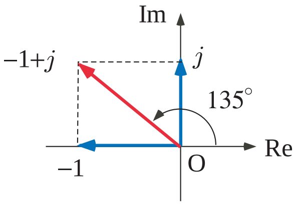

図 1: $1-j$

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}e^{-j\frac{3}{4}\pi}e^{jt} - \frac{-1-j}{1+1}e^{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j(t-\frac{3}{4}\pi)} + \left(\frac{1}{2}e^{t} + j\frac{1}{2}e^{t}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(t-\frac{3}{4}\pi\right) + j\sin\left(t-\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}e^{t} + j\frac{1}{2}e^{t}\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

仮想的な入力の sin 成分だけ，すなわち虚数成分のみを取り出せばよい。よって，$y(t)$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{Im}[y(t)] \\
&= \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(t-\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{1}{2}e^{t}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

【別解】

逆ラプラス変換を用いる。

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+1}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{t} - \cos t - \sin t\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ となるので，

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{t} - \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{t} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる。$\sin(t-\pi) = -\sin t$ より

$$
y(t) = \underline{\frac{1}{2}e^{t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)} \qquad (7)
$$

となる。

【章末問題2】 伝達関数が $G(s) = 2/(s^3+2s^2+2s+1)$ の (安定な) システムに入力 $u(t) = \sin t$ を加えたときの，定常状態での出力 $y(t)$ を計算せよ。また，入力が $u(t) = 1 + \sin t$ の場合はどうなるか。

(解答)

$u(t) = \sin t$ のとき $\omega = 1$ よりゲイン

$$\begin{aligned} |G(j)| &= \left|\frac{2}{j^3+2j^2+2j+1}\right| = \left|\frac{2}{-j-2+2j+1}\right| \\ &= \left|\frac{2}{j-1}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned} \tag{8}$$

位相

$$\begin{aligned} \angle G(j) &= \angle\frac{2}{j-1} = \angle 2 - \angle(j-1) \\ &= 0 - 135^\circ = -135^\circ = -\frac{3}{4}\pi \end{aligned} \tag{9}$$

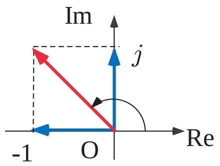

図 2: $j-1$

よって，

$$\underline{y(t) = \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)} \tag{10}$$

$u(t) = 1$ のとき $\omega = 0$ よりゲイン

$$|G(0)| = \left|\frac{2}{0^3+0^2+0+1}\right| = 2 \tag{11}$$

位相

$$\angle G(0) = \angle 2 = 0 \tag{12}$$

よって，重ね合わせより $u(t) = 1 + \sin t$ のとき

$$\underline{y(t) = 2 + \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)} \tag{13}$$