第 5 章 :周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

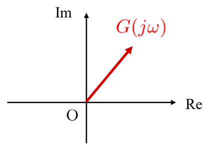
学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。

1

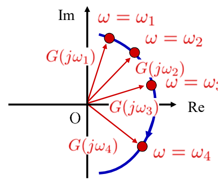
5 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

周波数 ω を一つ定めると, $G(j\omega)$ はある複素平面上のベクトルとして表せる.



ω を$0 \sim +\infty$ と変化させると $G(j\omega)$ は軌跡を描く



ベクトル軌跡

2

積分系 $G(s) = \frac{1}{s}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega|} = \frac{1}{|\omega|}$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega} = \angle\frac{1}{j} = \underbrace{\angle 1}_{=0} - \angle j$$
$$= -\angle j = -90^\circ$$

＋方向に位相を考える

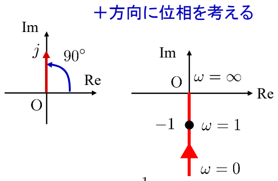


図 5.3 $G(s) = \frac{1}{s}$ のベクトル軌跡

2 重積分系 $G(s) = \frac{1}{s^2}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2}$

位相 $\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j^2} = \angle 1 - \angle j^2$
$$= 0 - \angle(-1) = -180^\circ$$

＋方向に位相を考える

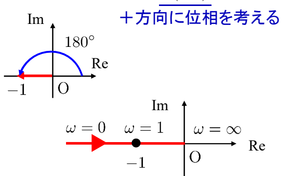


図 5.3 $G(s) = \frac{1}{s^2}$ のベクトル軌跡

3

積分系と位相遅れ

$\times\frac{1}{s}$: -90° 回転

90° 位相が遅れる

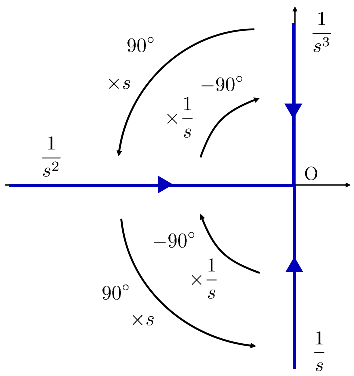
微分系と位相進み

$\times s$: 90° 回転

90° 位相が進む

動的システム

振幅と位相



4

1 次系 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ $(K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

ゲイン

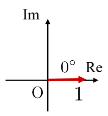
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|1+j\omega T|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{1+j\omega T} = \underbrace{\angle 1}_{=0^\circ} - \angle(1+j\omega T) = -\angle(1+j\omega T)$$

$\omega T = 0$ のとき

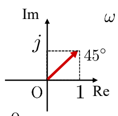
$$|G(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$
$$\angle G(0) = -\angle 1 = 0^\circ$$



5

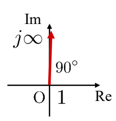
$\omega T = 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j) = -45^\circ$$



$\omega T \approx \infty$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = 0$$
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\infty) = -90^\circ$$



出発点 $(1, 0)$

終点 -90°

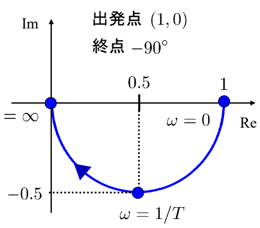


図 5.4 1 次系のベクトル軌跡

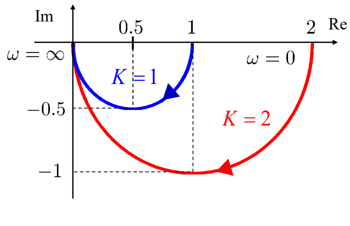
$\omega T = 0$	$\lvert G\rvert = 1$	$\angle G = 0^\circ$
$\omega T = 1$	$\lvert G\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\angle G = -45^\circ$
$\omega T \approx \infty$	$\lvert G\rvert \approx 0$	$\angle G \approx -90^\circ$

6

2022年度 制御工学II 前期 第2回資料

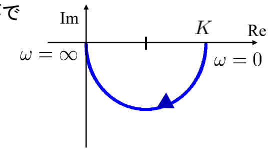
$\dfrac{K}{Ts+1}$ の場合

ゲイン K をかけると
原点を中心として K 倍に
拡大(縮小)される



T に関係なく, K が分かれば
, ベクトル軌跡を描くことができる。

$\dfrac{K}{Ts+1}$



7

1次系が半円になる理由

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{0.5(1+j\omega T)+0.5(1-j\omega T)}{1+j\omega T}$$

$$=\underline{0.5}+0.5\underline{\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}}$$

実軸の正方向
に 0.5 平行移動

$$0.5\cdot\frac{|1-j\omega T|}{|1+j\omega T|}=0.5,\quad \forall\omega$$

半径 0.5 の円周

中心 $(0.5,0)$
半径 0.5 の
(半)円周上を動く

8

---

2 次系 $G(s)=\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$$

$$=\frac{K}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j+1}$$

$$=\frac{K}{(j\Omega)^2+2\zeta\Omega j+1},\quad \left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle\left([1-\Omega^2]+j[2\zeta\Omega]\right)=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

9

$\Omega=0$	$\lvert G\rvert=K$	$\angle G=(-0^\circ)=0^\circ$
$\Omega=1$	$\lvert G\rvert=\dfrac{K}{2\zeta}$	$\angle G=-90^\circ$
$\Omega\approx\infty$	$\lvert G\rvert\approx 0$	$\angle G\approx-180^\circ$

出発点 $(1,0)$
終点 -180°

ω_n に関係なく, K, ζ が分かれば,
ベクトル軌跡を描くことができる。

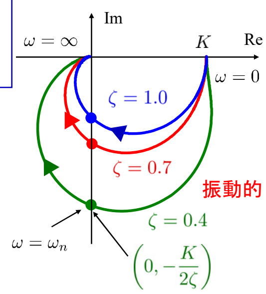
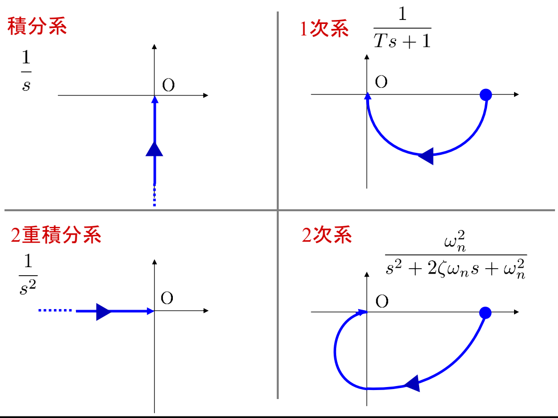


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡

10

ベクトル軌跡の出発点と終点



11

第 5 章 : 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。

12