第 5 章 :周波数応答

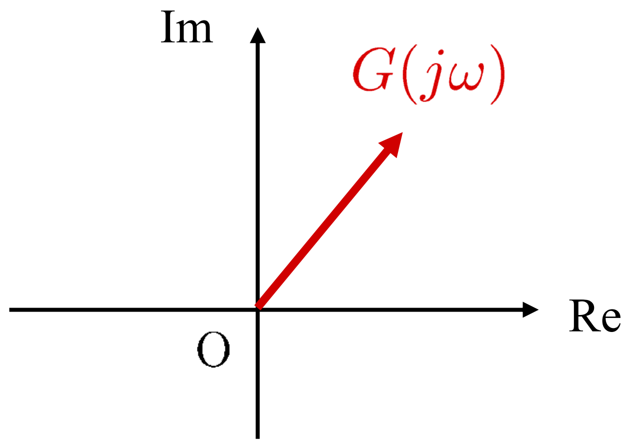
5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

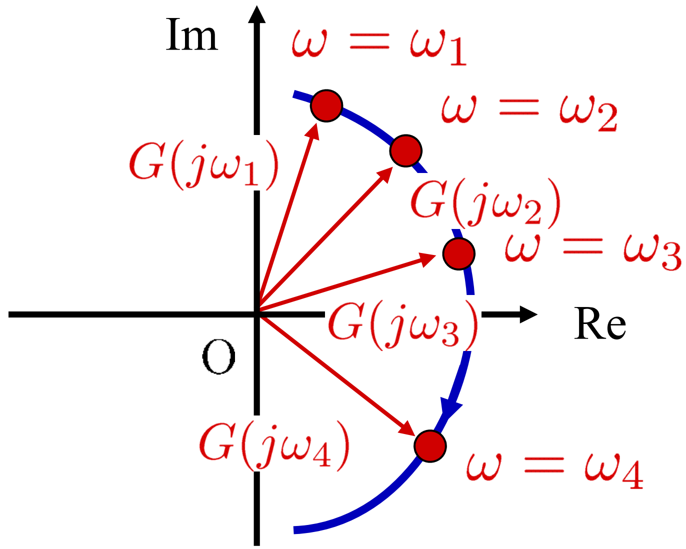
学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。

5 周波数応答
5.2 ベクトル軌跡

周波数 ω を一つ定めると,
$G(j\omega)$ はある複素平面上の
ベクトルとして表せる.



ω を$0 \sim +\infty$ と変化させると
$G(j\omega)$ は軌跡を描く



ベクトル軌跡

積分系 $G(s) = \dfrac{1}{s}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$

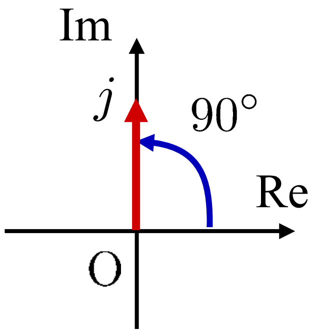
ゲイン $|G(j\omega)| = \dfrac{1}{|j\omega|} = \dfrac{1}{|\omega|}$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega} = \angle\frac{1}{j} = \underbrace{\angle 1}_{=0} - \angle j$$

$$= -\underline{\angle j} = -90^\circ$$

＋方向に位相を考える



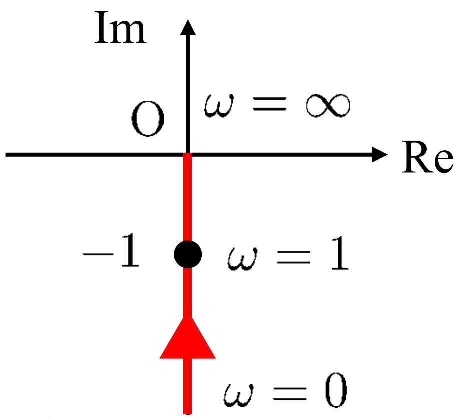


図 5.3　$G(s) = \dfrac{1}{s}$　のベクトル軌跡

2 重積分系 $G(s) = \dfrac{1}{s^2}$

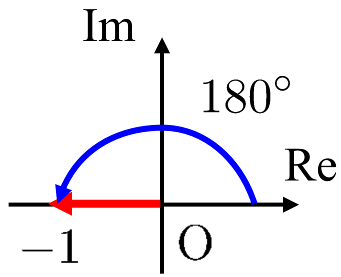
周波数伝達関数 $G(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega^2}$

位相 $\angle G(j\omega) = \angle\dfrac{1}{j^2} = \angle 1 - \angle j^2$

$$= 0 - \underline{\angle(-1)} = -180^\circ$$

＋方向に位相を考える



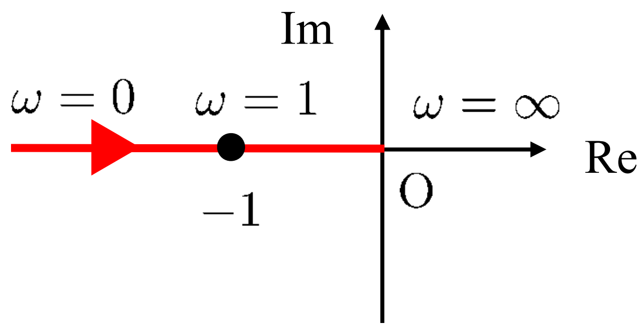


図 5.3　$G(s) = \dfrac{1}{s^2}$　のベクトル軌跡

積分系と位相遅れ

$\times \frac{1}{s}$ ： -90° 回転

90° 位相が遅れる

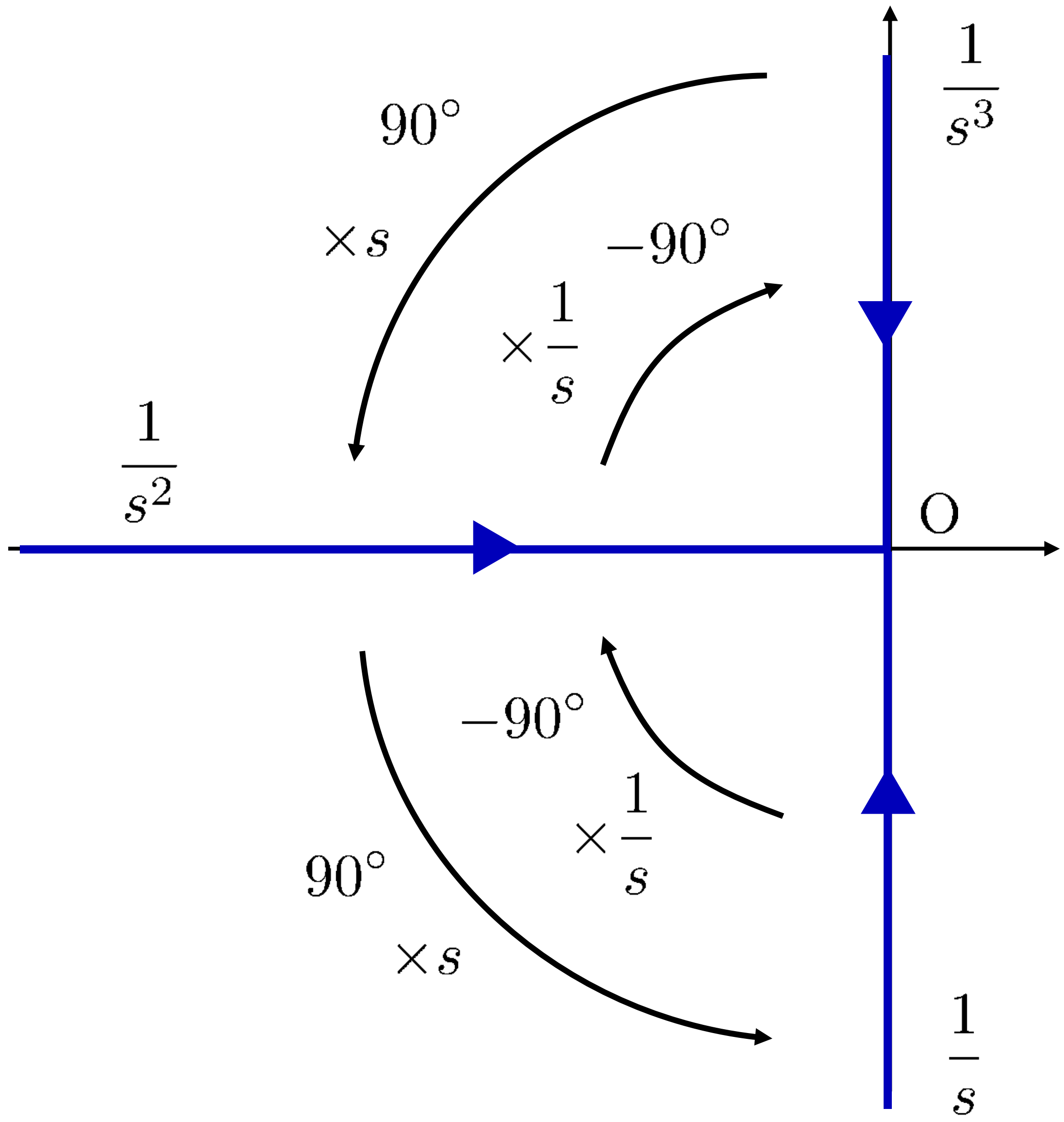
微分系と位相進み

$\times s$ ： 90° 回転

90° 位相が進む

動的システム

振幅と位相



1 次系 $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1} \quad (K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|1+j\omega T|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

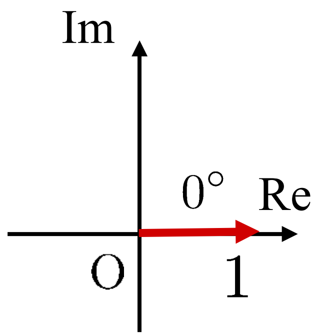
位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{1+j\omega T} = \underbrace{\angle 1}_{=0^\circ} - \angle(1+j\omega T) = -\angle(1+j\omega T)$$

$\omega T = 0$ のとき

$$|G(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

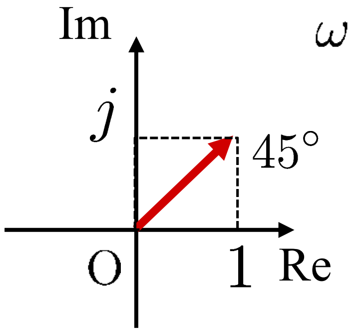
$$\angle G(0) = -\angle 1 = 0^\circ$$



$\omega T = 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j) = -45^\circ$$



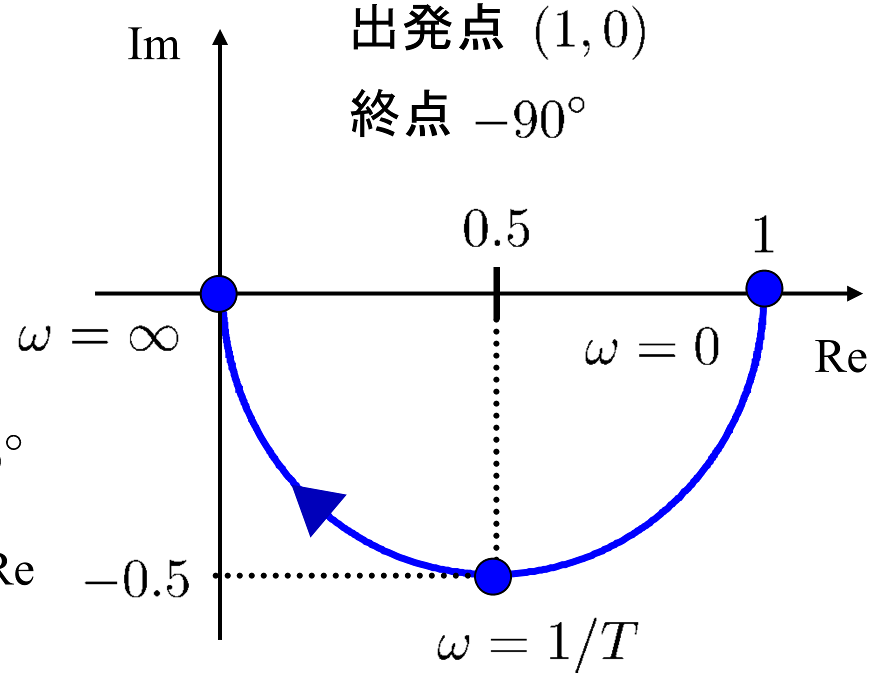
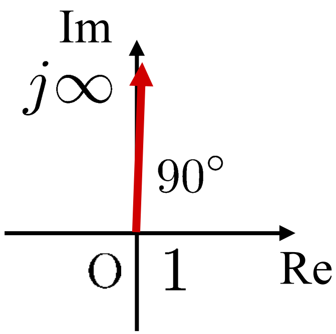


図 5.4 1 次系のベクトル軌跡

$\omega T \approx \infty$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = 0$$

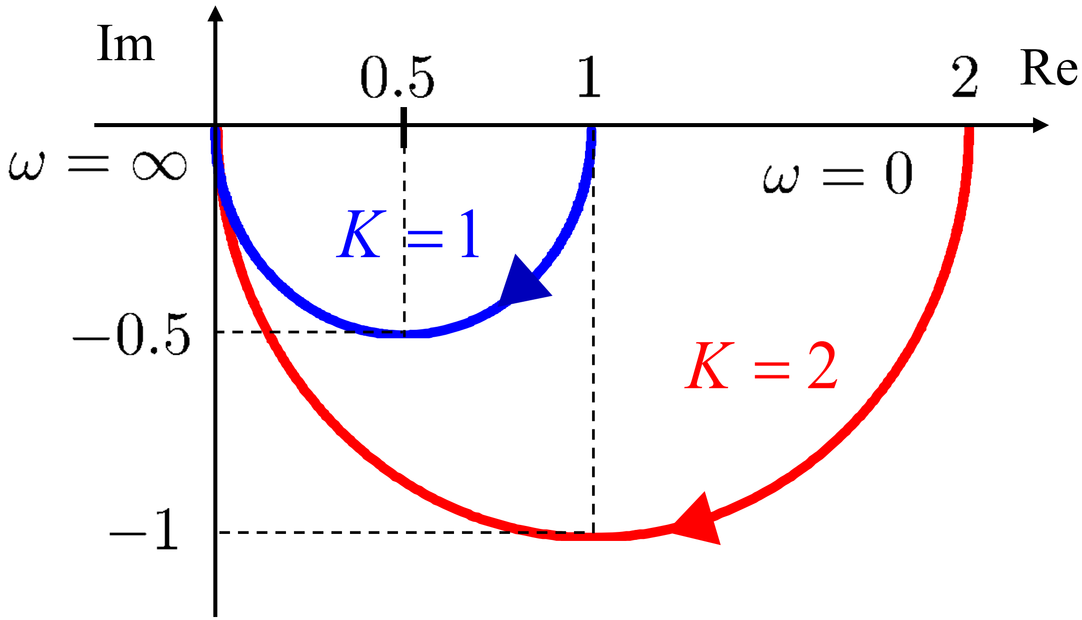
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\infty) = -90^\circ$$



$\omega T = 0$	$\lvert G\rvert = 1$	$\angle G = 0^\circ$
$\omega T = 1$	$\lvert G\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\angle G = -45^\circ$
$\omega T \approx \infty$	$\lvert G\rvert \approx 0$	$\angle G \approx -90^\circ$

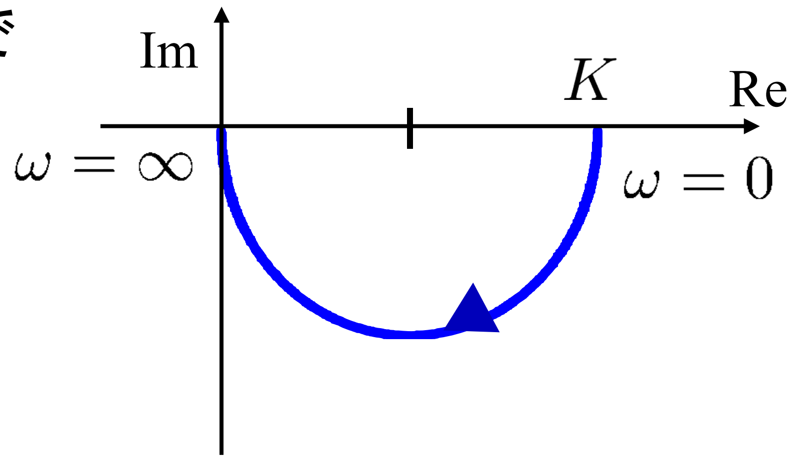
$\dfrac{K}{Ts+1}$ の場合

ゲイン K をかけると
原点を中心として K 倍に
拡大(縮小)される



T に関係なく, K が分かれば
, ベクトル軌跡を描くことができる。

$$\frac{K}{Ts+1}$$



1次系が半円になる理由

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{0.5(1+j\omega T)+0.5(1-j\omega T)}{1+j\omega T}$$

$$= \underline{0.5} + \underline{0.5\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}}$$

中心 $(0.5, 0)$
半径 0.5 の
(半)円周上を動く

実軸の正方向
に 0.5 平行移動

$$0.5 \cdot \frac{|1-j\omega T|}{|1+j\omega T|} = 0.5, \quad \forall \omega$$

半径 0.5 の円周

2 次系　$G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

周波数伝達関数

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\
&= \frac{K}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j + 1} \\
&= \frac{K}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\Omega j + 1}, \quad \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}\right)
\end{aligned}
$$

ゲイン

$$
|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}
$$

位相

$$
\angle G(j\omega) = -\angle\left([1-\Omega^2] + j[2\zeta\Omega]\right) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}
$$

$$\Omega = 0 \quad |G| = K \quad \angle G = (-0^\circ) = 0^\circ$$

$$\Omega = 1 \quad |G| = \frac{K}{2\zeta} \quad \angle G = -90^\circ$$

$$\Omega \approx \infty \quad |G| \approx 0 \quad \angle G \approx -180^\circ$$

出発点 $(1, 0)$
終点 -180°

ω_n に関係なく, K, ζ が分かれば,
ベクトル軌跡を描くことができる。

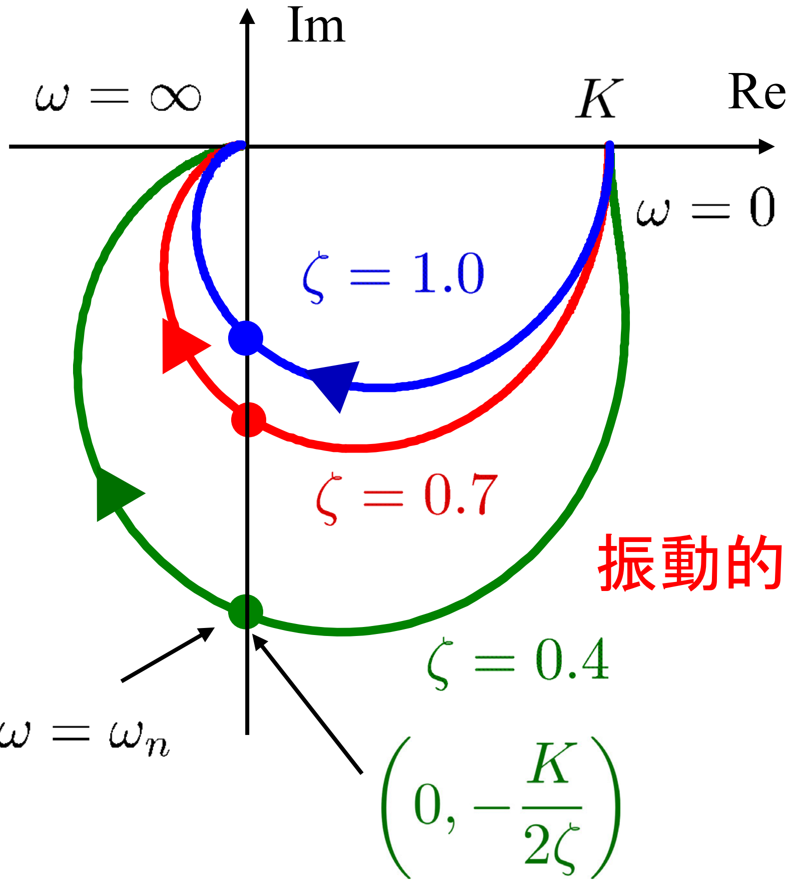
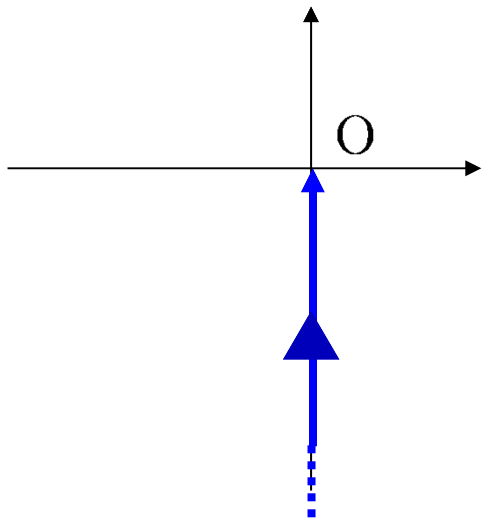


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡

ベクトル軌跡の出発点と終点

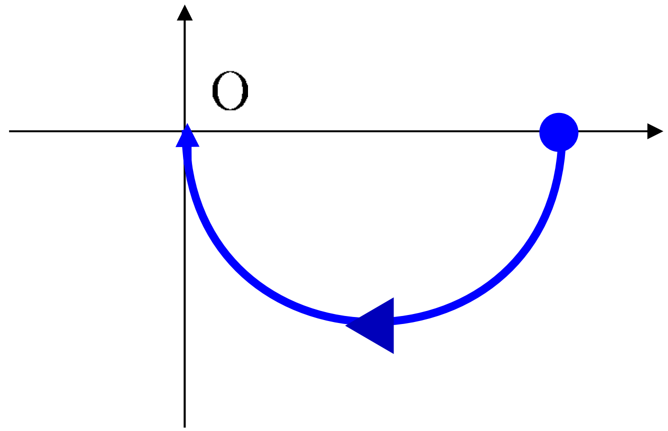
積分系

$$\frac{1}{s}$$



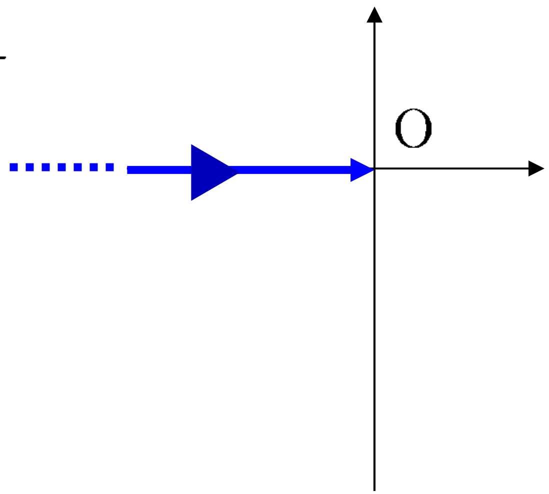
1次系

$$\frac{1}{Ts+1}$$



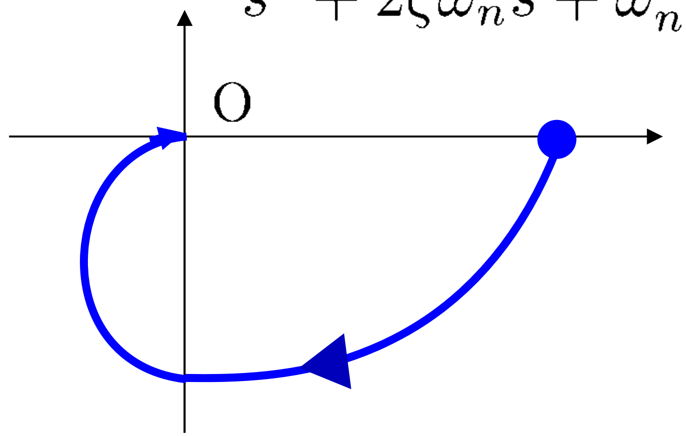
2重積分系

$$\frac{1}{s^2}$$



2次系

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



第 5 章 :周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。