2022年度 制御工学II 第5回資料

第 5 章 : 周波数応答

5.3 ボード線図
5.4 ボード線図の性質

キーワード : ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線
最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができるようになる。最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

1

---

2 次系 $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (K = 1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j + 1}$$

$$= \frac{1}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\Omega j + 1} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega} \qquad \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$$

2

---

2 次系 $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$

$= \dfrac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega}$

ゲイン（デシベル値）

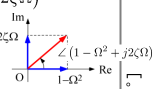
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$

$\Omega \ll 1 \quad G(j\omega) \approx 1$

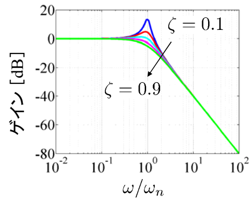
$\Omega \gg 1 \quad G(j\omega) \approx \dfrac{1}{-\Omega^2}$



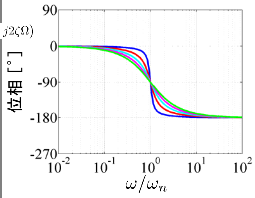
$\Omega \ll 1 \quad 20\log|G| = 20\log 1 \approx 0$ dB
$\angle G \approx 0^\circ$

$\Omega = 1 \quad 20\log|G| = 20\log\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right|$ dB
$\angle G = -90^\circ$

$\Omega \gg 1 \quad 20\log|G| \approx -40\log|\Omega|$ dB
$\angle G \approx -180^\circ$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

3

$\Omega = 0 \quad |G| = 1 \quad \angle G = (-0^\circ) = 0^\circ$

$\Omega = 1 \quad |G| = \dfrac{1}{2\zeta} \quad \angle G = -90^\circ$

$\Omega \approx \infty \quad |G| \approx 0 \quad \angle G \approx -180^\circ$

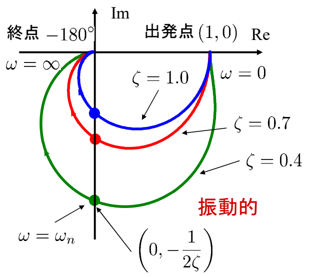
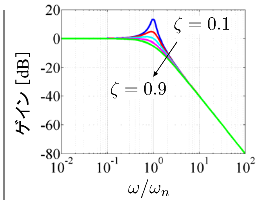
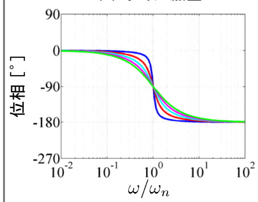


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

4

ζ の求め方

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \boxed{2}s + \boxed{1}}$$

$\boxed{2\zeta\omega_n = 2}$ $\boxed{\omega_n^2 = 1}$

$\omega_n^2 = 1$ より $\omega_n = 1$

$2\zeta\omega_n = 2$ より

$\zeta = \dfrac{1}{\omega_n} = 1$

$K \neq 1$ のときの求め方

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{K}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$ 変更なし

$\Omega \ll 1 \quad G(j\omega) \approx K$

$\Omega \gg 1 \quad G(j\omega) \approx \dfrac{K}{-\Omega^2}$

5

---

5 周波数応答
5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

[例]

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$

$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$ 同じ

位相

$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$

$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$ 異なる

6

$\omega = 0$

$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$

$\omega \to \infty$

$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$

$= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$

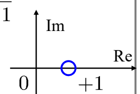
$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$

$= \underline{-90^\circ} - 180^\circ = -270^\circ$

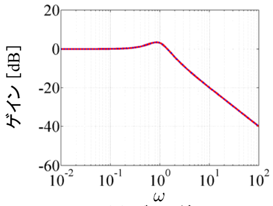
不安定零点の場合
位相の取り方に注意

位相が遅れる

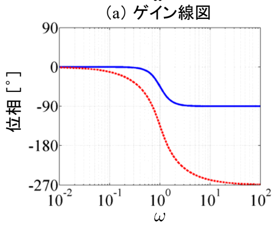
$G_2(s) = \dfrac{1-s}{s^2+s+1}$



不安定零点



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

7

最小位相系 安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

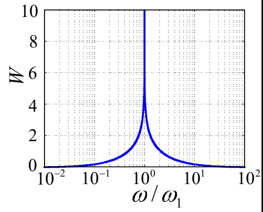
ゲインから位相が一意に定まる.
(ボードのゲイン – 位相関係式)

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dM}{du} W du \quad (^\circ)\ \text{度}$$

$u = \ln(\omega/\omega_1)$ 正規化角周波数

$M = \ln|G(j\omega)|$ 対数ゲイン

$W = \ln(\coth(|u|/2))$ 重み関数



$\dfrac{dM}{du}$ 横軸，縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W du = \frac{\pi^2}{2} \qquad (\omega = \omega_1 \text{ でピーク})$$

8

(dM/du 一定のとき)

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W du$$

$$= \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du} \times 90^\circ$$

$$= n \times 90^\circ$$

$\underline{n = -1 \text{ のとき}}$

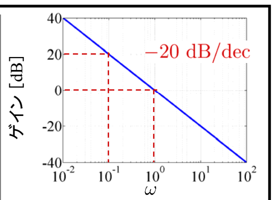
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -1$

とすると

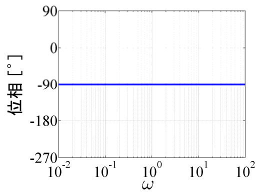
-20 dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$

積分系

1 次系(高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

9

$\underline{n = -2 \text{ のとき}}$

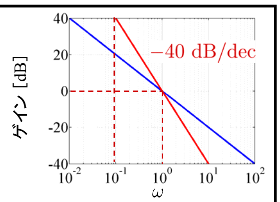
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -2$

とすると

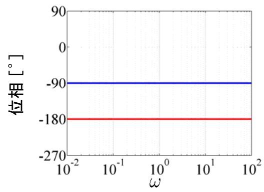
-40 dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$

2 重積分系

2 次系(高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

10

第 5 章 :周波数応答

5.3 ボード線図

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線
最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができるようになる。最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

11