第 5 章 :周波数応答

5.3 ボード線図

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線
最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができるようになる。最小位相系における
ゲインと位相の関係について理解する。

2 次系 $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (K = 1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j + 1}$$

$$= \frac{1}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\Omega j + 1} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega} \qquad \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$$

2 次系

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega}$$

ゲイン（デシベル値）

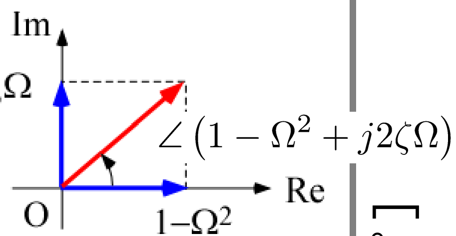
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

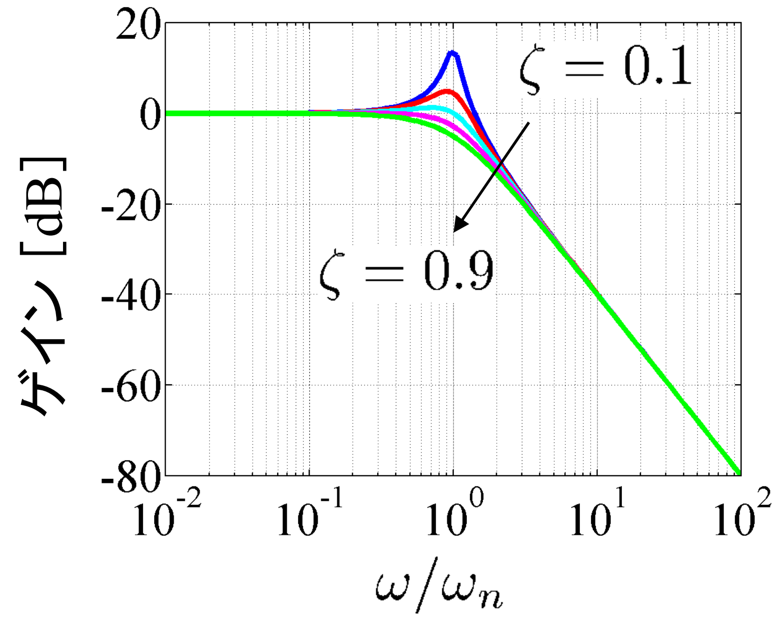
$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$$

$$\Omega \ll 1 \quad G(j\omega) \approx 1$$

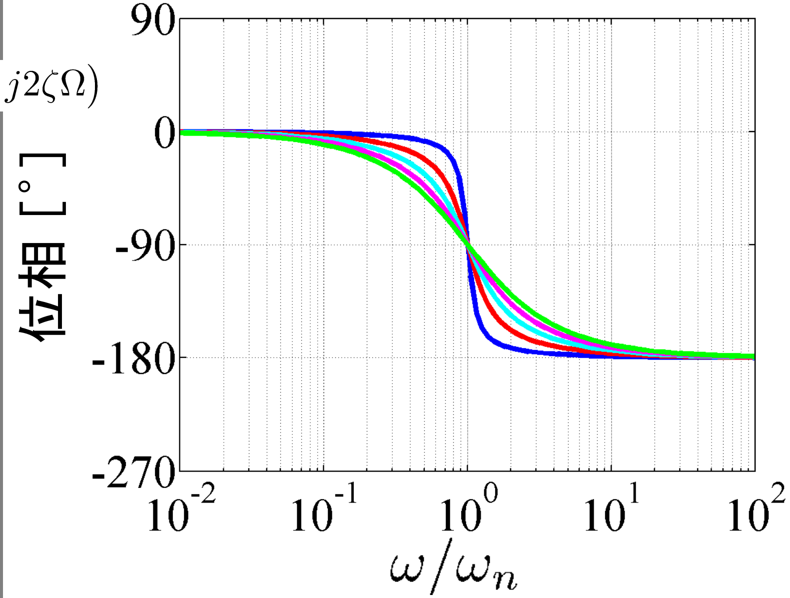
$$\Omega \gg 1 \quad G(j\omega) \approx \frac{1}{-\Omega^2}$$



$$\begin{cases} \Omega \ll 1 & 20\log|G| = 20\log 1 \approx 0 \text{ dB} \\ & \angle G \approx 0^\circ \\ \Omega = 1 & 20\log|G| = 20\log\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right| \text{ dB} \\ & \angle G = -90^\circ \\ \Omega \gg 1 & 20\log|G| \approx -40\log|\Omega| \text{ dB} \\ & \angle G \approx -180^\circ \end{cases}$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$$
\begin{array}{lll}
\Omega = 0 & |G| = 1 & \angle G = (-0^\circ) = 0^\circ \\
\Omega = 1 & |G| = \dfrac{1}{2\zeta} & \angle G = -90^\circ \\
\Omega \approx \infty & |G| \approx 0 & \angle G \approx -180^\circ
\end{array}
$$

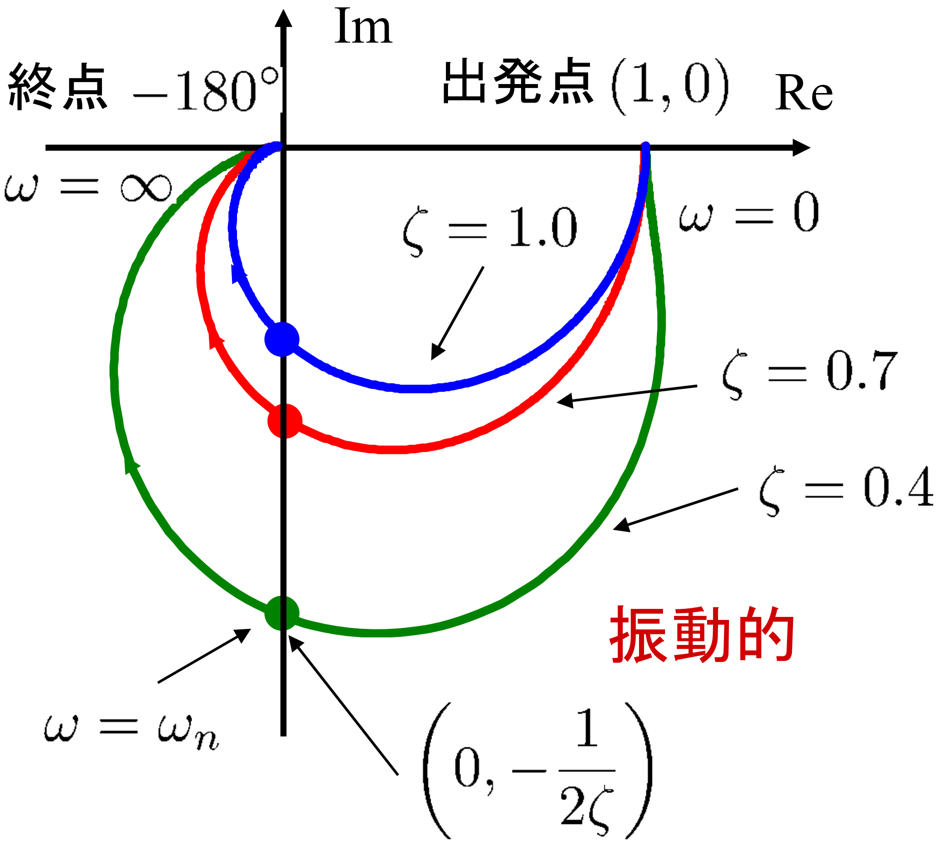
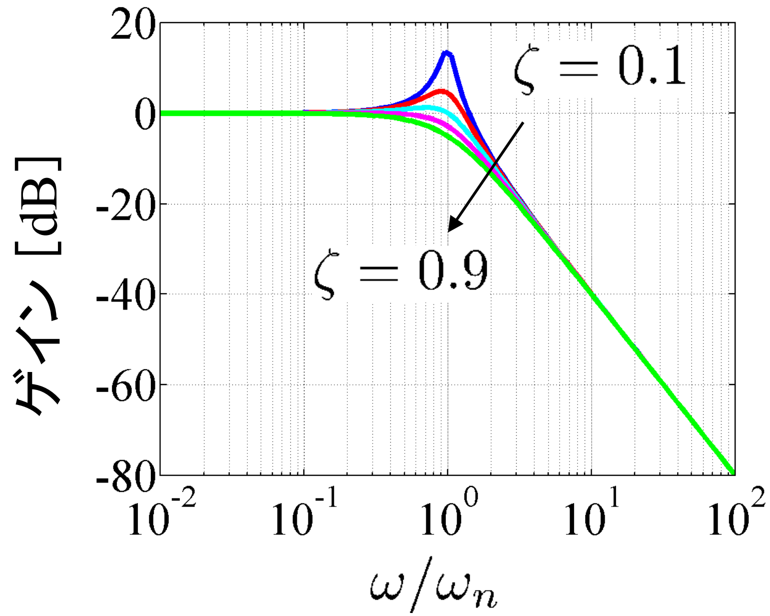
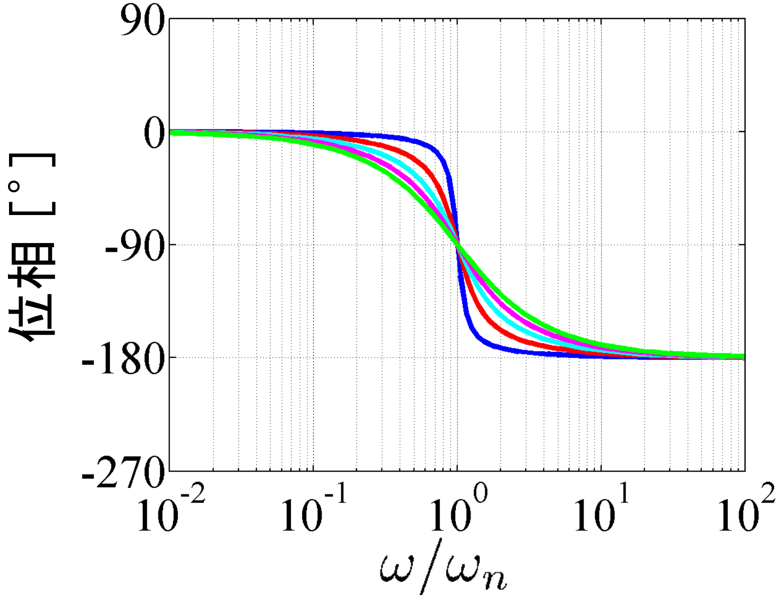


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

ζ の求め方

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \boxed{2}s + \boxed{1}}$$

$2\zeta\omega_n = 2$

$\omega_n^2 = 1$

$\omega_n^2 = 1$ より $\omega_n = 1$

$2\zeta\omega_n = 2$ より

$$\zeta = \frac{1}{\omega_n} = 1$$

$K \neq 1$ のときの求め方

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{K}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$$ 変更なし

$\Omega \ll 1 \quad G(j\omega) \approx K$

$\Omega \gg 1 \quad G(j\omega) \approx \dfrac{K}{-\Omega^2}$

5 周波数応答
5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

[例]

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1}, \ G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{(j\omega)^2+j\omega+1} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$

$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$

同じ

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

異なる

$\omega = 0$

$$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$$

$\omega \to \infty$

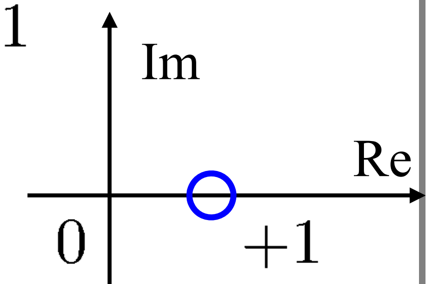
$$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$$
$$= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$$

$$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$$
$$= \underline{-90^\circ} - 180^\circ = -270^\circ$$

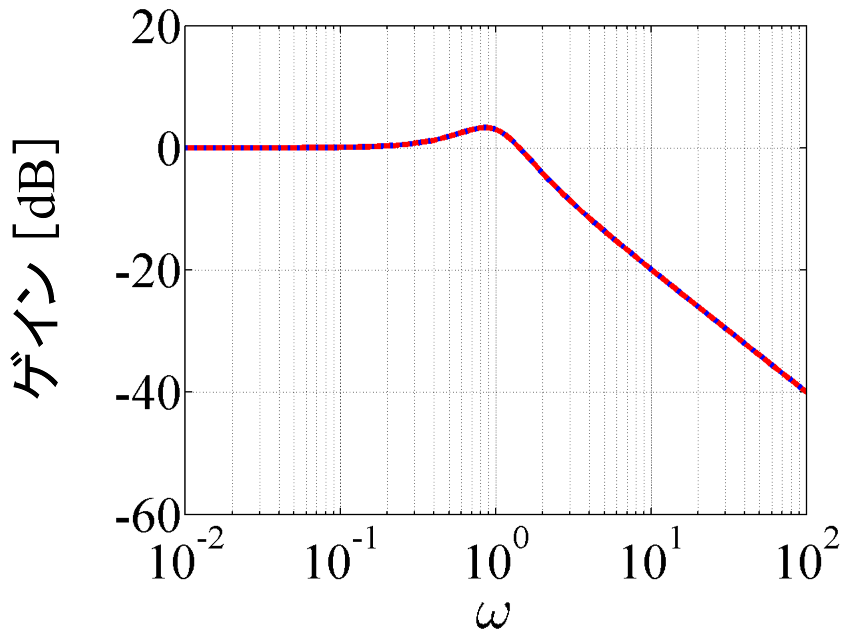
不安定零点の場合
位相の取り方に注意

位相が遅れる

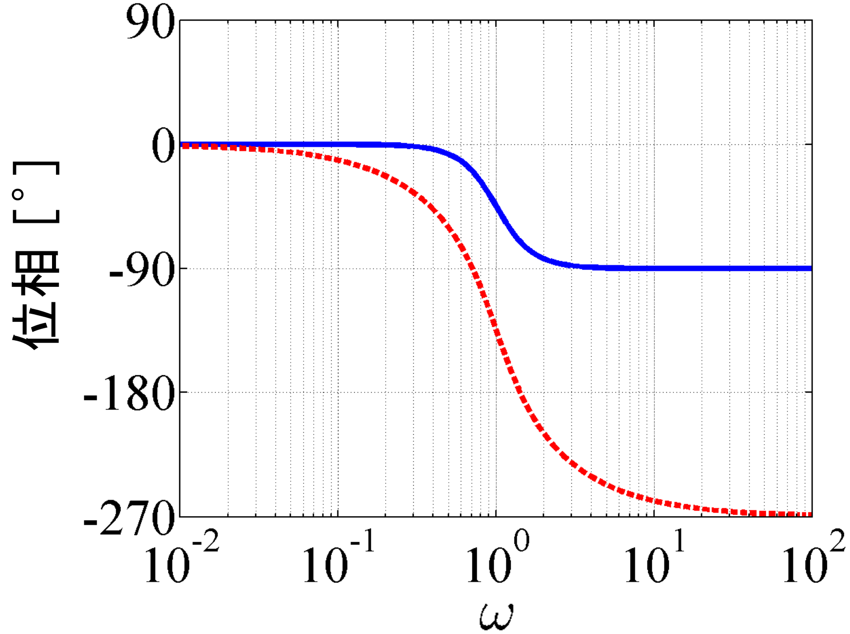
$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$



不安定零点



(a) ゲイン線図



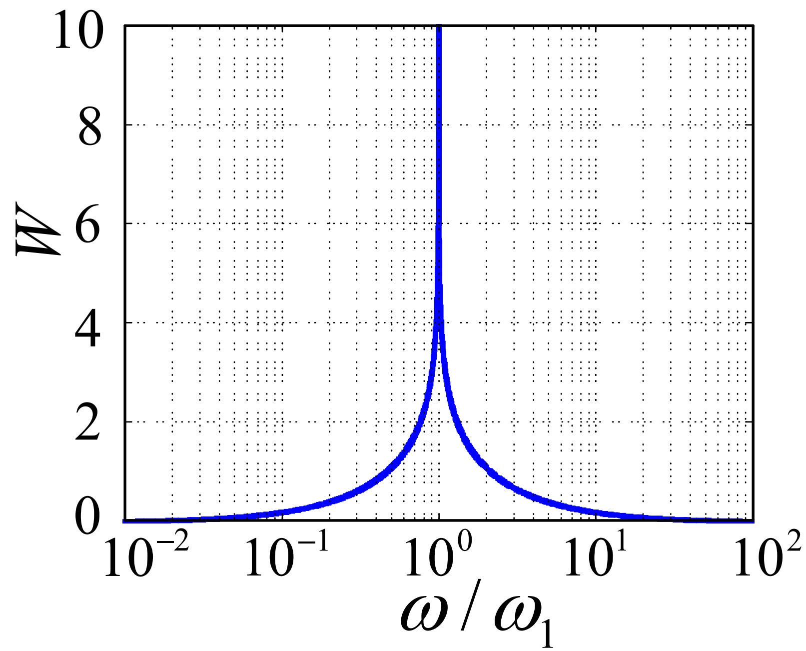
(b) 位相線図

最小位相系　安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

ゲインから位相が一意に定まる.
(ボードのゲイン－位相関係式)

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dM}{du} W du$$

(°) 度



$$\begin{cases} u = \ln(\omega/\omega_1) & \text{正規化角周波数} \\ M = \ln|G(j\omega)| & \text{対数ゲイン} \\ W = \ln(\coth(|u|/2)) & \text{重み関数} \end{cases}$$

$\frac{dM}{du}$ 横軸, 縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W du = \frac{\pi^2}{2}$$　($\omega = \omega_1$ でピーク)

（ dM/du 一定のとき）

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W du$$

$$= \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du} \times 90^\circ$$

$$= n \times 90^\circ$$

<u>$n = -1$ のとき</u>

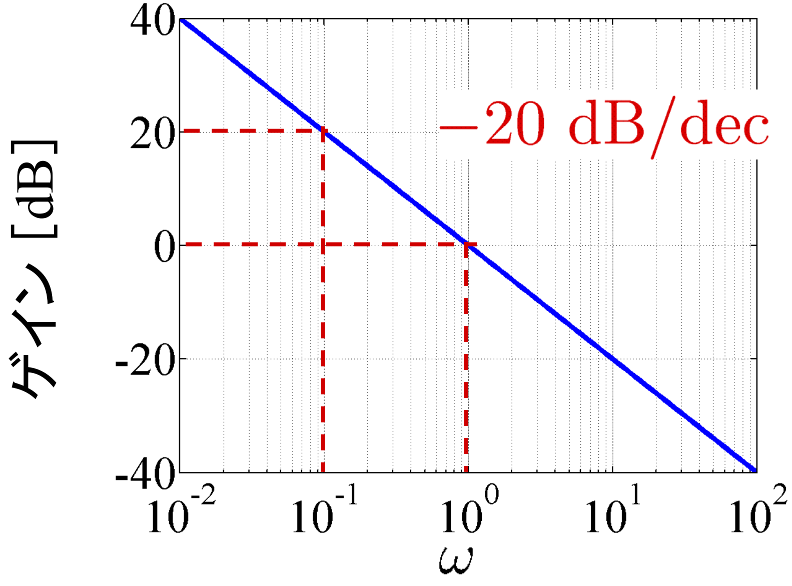
$$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1 \text{ で } \frac{dM}{du} = -1$$

とすると

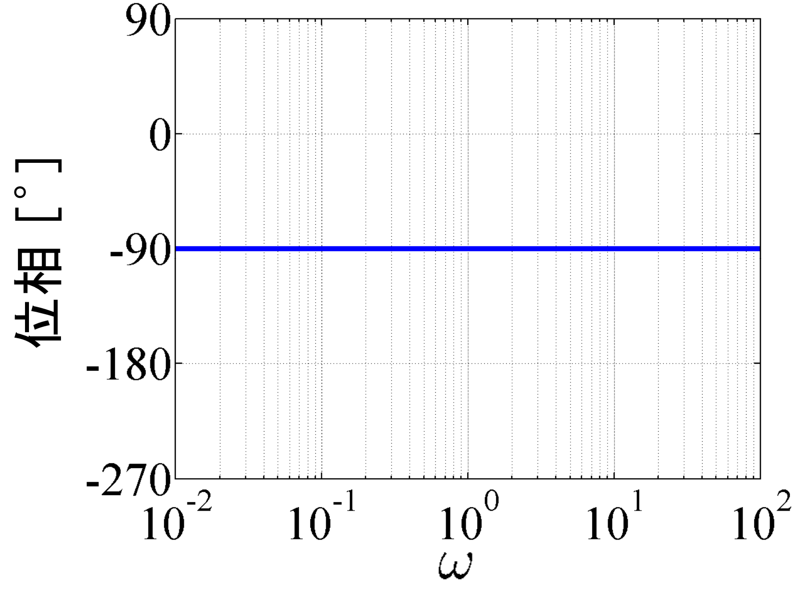
$$-20 \text{ dB/dec} \Rightarrow \angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$$

積分系

1 次系（高周波域）



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$n = -2$ のとき

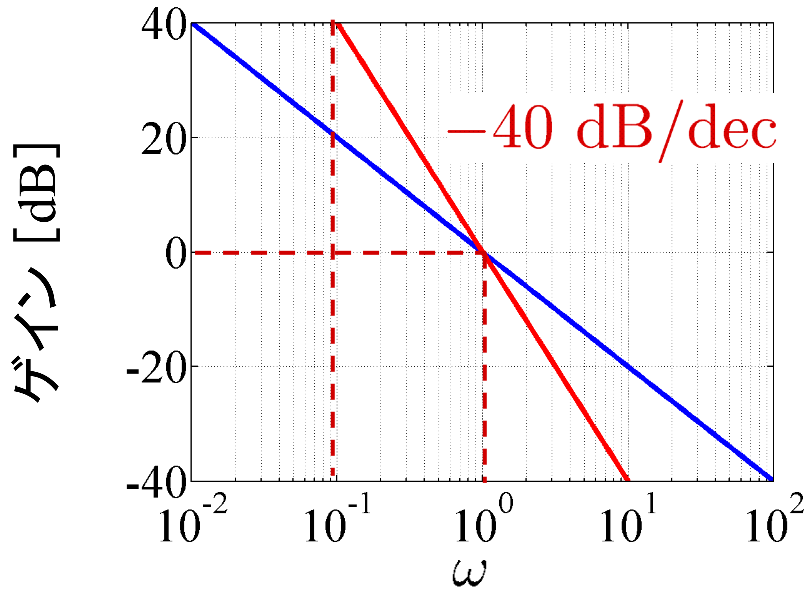
$$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1 \text{ で } \frac{dM}{du} = -2$$

とすると

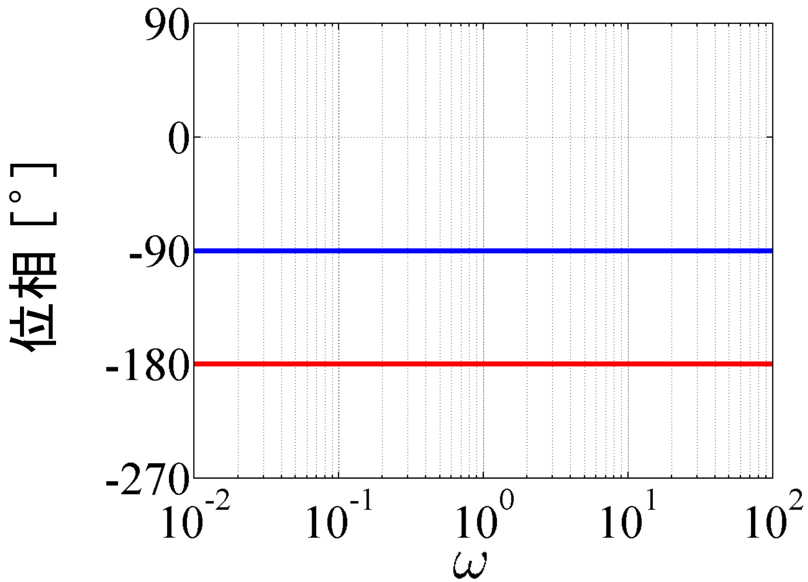
-40 dB/dec $\Rightarrow \angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$

2 重積分系

2 次系（高周波域）



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

第 5 章 :周波数応答

5.3 ボード線図

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ボード線図, ゲイン曲線, 位相曲線,
最小位相系, ゲイン一位相関係式

学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができるようになる。最小位相系における
ゲインと位相の関係について理解する。