第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ゲイン曲線，位相曲線，最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

5 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

[例]

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1},\ G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{(j\omega)^2+j\omega+1} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$

$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)| \qquad \text{同じ}$$

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega) \qquad \text{異なる}$$

$\omega = 0$

$$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$$

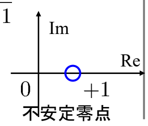
$\omega \to \infty$

$$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$$
$$= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$$
$$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$$
$$= \underline{-90^\circ} - 180^\circ = -270^\circ$$

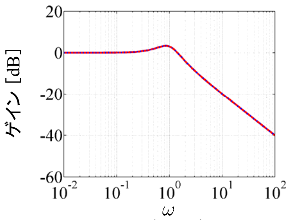
不安定零点の場合
位相の取り方に注意

位相が遅れる

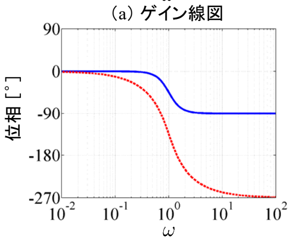
$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$



不安定零点



(a) ゲイン線図



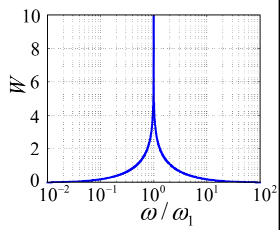
(b) 位相線図

最小位相系 安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

ゲインから位相が一意に定まる.
(ボードのゲイン − 位相関係式)

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dM}{du}W\,du \quad (^\circ)\ \text{度}$$

$$\begin{cases} u = \ln(\omega/\omega_1) & \text{正規化角周波数} \\ M = \ln|G(j\omega)| & \text{対数ゲイン} \\ W = \ln(\coth(|u|/2)) & \text{重み関数} \end{cases}$$



$\dfrac{dM}{du}$ 横軸，縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W\,du = \frac{\pi^2}{2} \qquad (\ \omega = \omega_1 \text{ でピーク})$$

(dM/du 一定のとき)

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W\,du$$
$$= \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du} \times 90^\circ$$
$$= n \times 90^\circ$$

$\underline{n = -1\text{のとき}}$

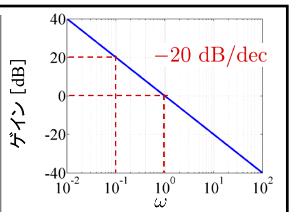
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -1$

とすると

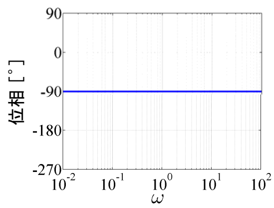
$-20\ \mathrm{dB/dec} \ \Rightarrow\ \angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$

積分系

1 次系(高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$\underline{n = -2\text{ のとき}}$

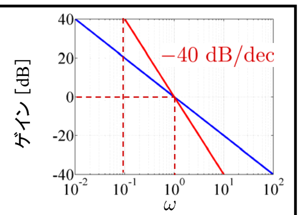
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -2$

とすると

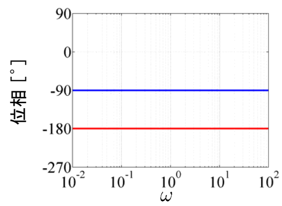
$-40\ \mathrm{dB/dec} \ \Rightarrow\ \angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$

2 重積分系

2 次系(高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

5 周波数応答
5.4 ボード線図の性質

ボード線図の利点　　極形式で表示

［アイデア］　ゲイン：対数スケール
位相：線形スケール

$G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$　（直列結合）

$G_i(j\omega)=r_i e^{j\theta_i}\quad(i=1\sim 3)$ とおく

$$G(j\omega)=\left(r_1e^{j\theta_1}\right)\left(r_2e^{j\theta_2}\right)\left(r_3e^{j\theta_3}\right)$$
$$=\underbrace{r_1r_2r_3}_{=r}e^{j\underbrace{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}_{=\theta}}$$
$$=re^{j\theta}$$

7

$$G(j\omega)=re^{j\theta}=r_1r_2r_3e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$20\log|G(j\omega)|=20\log r=20\log(r_1r_2r_3)$$
$$=20\log r_1+20\log r_2+20\log r_3$$
$$=\sum_{i=1}^{3}20\log r_i=\sum_{i=1}^{3}20\log|G_i(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega)=\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\theta_i=\sum_{i=1}^{3}\angle G_i(j\omega)$$

直列結合のとき，ゲインと位相を単純に
加えあわせればよい

8

ゲイン K 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}\quad(T=1)$$

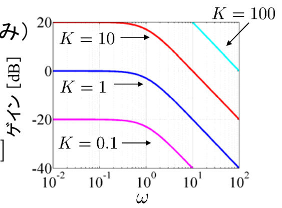
$K=0.1$

$+20$ [dB]　$(\times 10)$

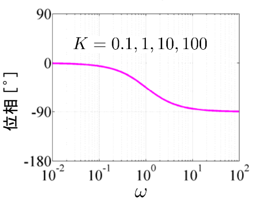
$+40$ [dB]　$(\times 100)$　$K=1$

$K=10$

$$G_1(j\omega)=\frac{0.1}{1+j\omega}$$
$$G_2(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}=10G_1$$
$$|G_2|=20\log 10+20\log G_1$$
$$\angle G_2=\angle 10+\angle G_1=\angle G_1$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

9

$G^{-1}(s)$（逆システム）のボード線図

ゲイン

$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right|=-20\log|G(j\omega)|$$

位相

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)}=-\angle G(j\omega)$$

逆システムでは，ゲインと位相の符号を反転

10

表 5.1　基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K	dB, 0, $20\log\lvert K\rvert$, ω	0°, ω
s	dB, 0, 1, 20dB/dec, ω	90°, 0°, ω
$\frac{1}{s}$	dB, 0, 1, −20dB/dec, ω	0°, -90°, ω
$Ts+1$	dB, 0, 20dB/dec, $1/T$, ω	90°, 0°, $0.2/T$, $5/T$, ω
$\frac{1}{Ts+1}$	dB, 0, $1/T$, −20dB/dec, ω	0°, -90°, $0.2/T$, $5/T$, ω
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	dB, 0, ω_n, ω	0°, -180°, ω_n, ω

11

［例 5. 1］

$$G(s)=\frac{100(s+1)}{s(s+10)}=G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)\cdot G_4(s)$$
$$=10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.1s+1}\cdot(s+1)$$

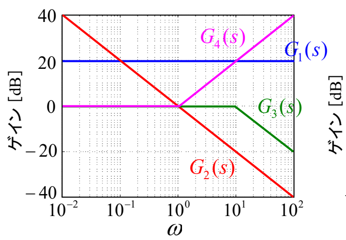


図 5. 12　各要素のゲイン線図
（折れ線近似）

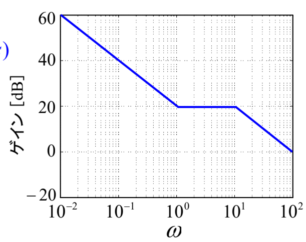


図 5. 13　$G(s)$のゲイン線図
（折れ線近似）

12

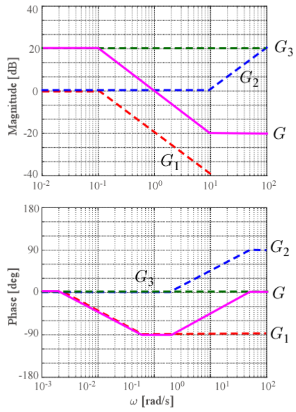
5章演習問題【5】(b)

$$\frac{s+10}{10s+1}$$

$$G(s)=\frac{s+10}{10s+1}=\left(\frac{1}{10s+1}\right)\cdot(s+10)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{10s+1}\right)}_{G_1(s)}\cdot\underbrace{(0.1s+1)}_{G_2(s)}\cdot\underbrace{10}_{G_3(s)}$$

	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	10	0.1	0.02	0.5
$G_2(s)$	0.1	10	2	50

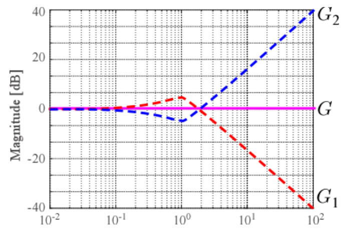


13

5章演習問題【6】(c)

$$\frac{s^2-3s+1}{s^2+3s+1}$$

$$G(s)=\frac{s^2-3s+1}{s^2+3s+1}=\underbrace{(s^2-3s+1)}_{G_1(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+3s+1}}_{G_2(s)}$$



14

ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる.
- 折れ線近似が容易で, システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる.
- 最小位相系では, ゲイン曲線から位相曲線の概略がわかる.
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える.
- 実験データからボード線図を描くことも容易である.

15

むだ時間要素

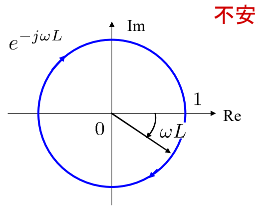
$$G(s)=e^{-sL}$$

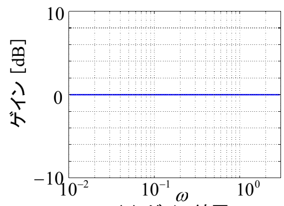
パデー近似

$$e^{-sL}\approx\frac{1-Ls/2}{1+Ls/2}$$

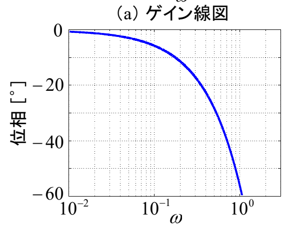
$$e^{-sL}\approx\frac{1-Ls/2+(Ls)^2/12}{1+Ls/2+(Ls)^2/12}$$

不安定零点





(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

16

第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ゲイン曲線, 位相曲線, 最小位相系, ゲインー位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

17