

第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード : ナイキストの安定判別法

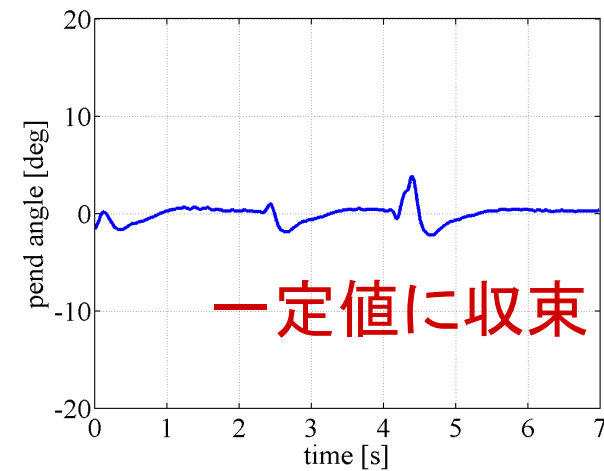
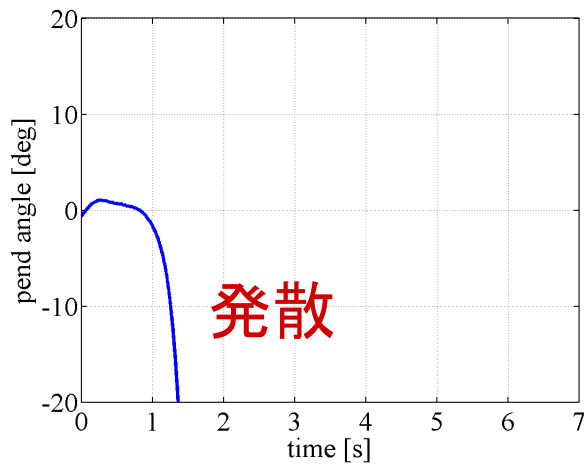
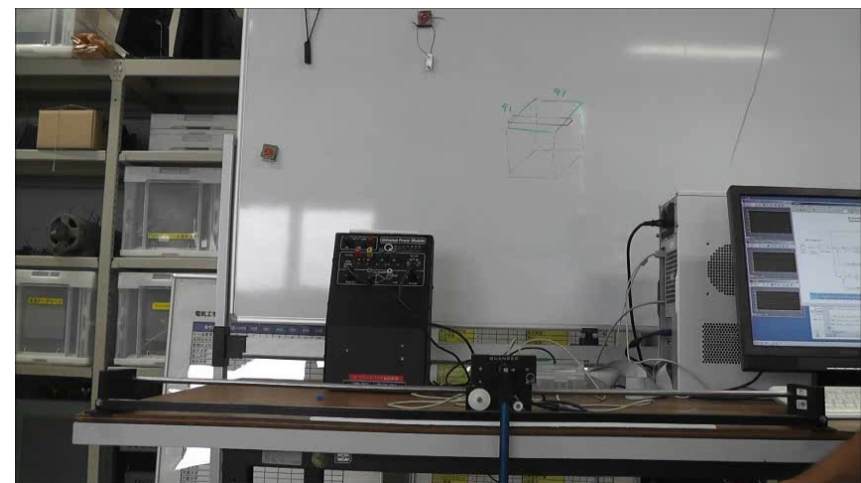
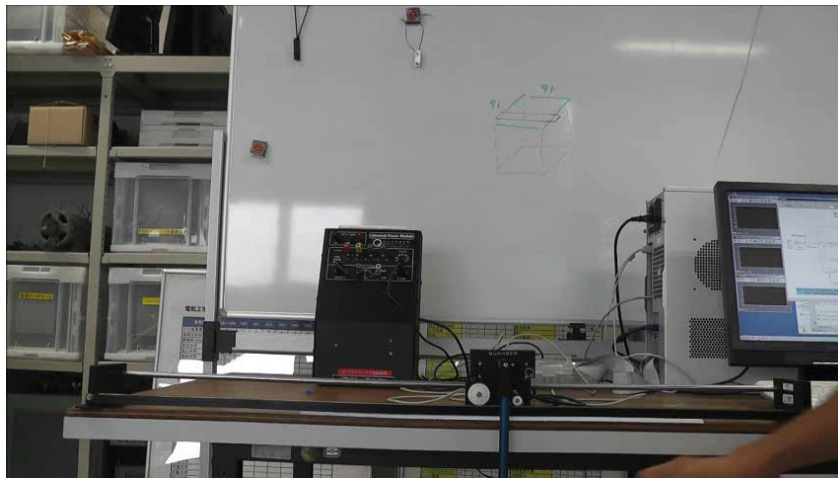
学習目標 : ナイキストの安定判別法を理解し, フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。

6 フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

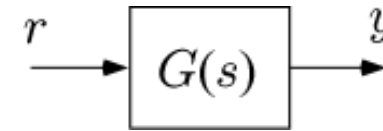
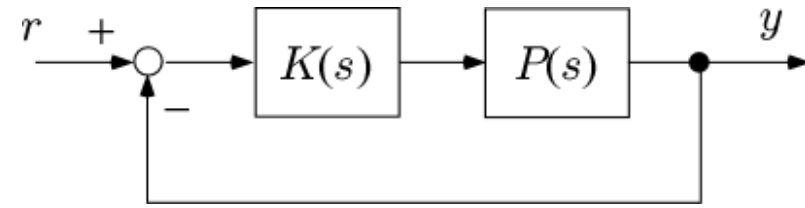
安定とは 一定値に落ち着く

【例】倒立振り子システム



$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$K(s) = 30$$



極の実部が負

閉ループ系

$$G(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3) + 30}$$

= 0 の解

(短所) 計算に手間がかかる

ラウス=フルビッツの安定判別法

$$G(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3) + 30}$$

すべての係数が正

+
ラウス数列, またはフルビッツの行列式が正

(短所) 次数が高いと手間がかかる

内部安定性

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

$$K(s) = 30 = \frac{30}{1} = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) = D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

$$= (s+1)(s+2)(s+3) + 30$$

= 0 の解

(長所) 閉ループ $G(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$ を計算しなくてよい

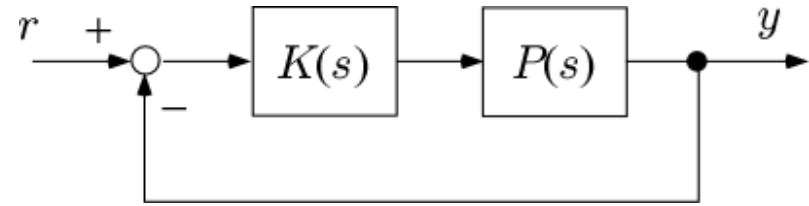
(短所) 計算に手間がかかる



ナイキストの安定判別法

開ループ伝達関数の周波数応答に基づき図的に判別する

ナイキストの安定判別法



[1] 目的

$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: 開ループ系 $P(s)K(s)$ の極

$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$: 閉ループ系 (制御系) の極

内部安定性

$$\begin{aligned} 1 + P(s)K(s) &= 1 + \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_K(s)}{D_K(s)} = \frac{D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}{D_P(s)D_K(s)} \\ &= \frac{(s - r_1)(s - r_2) \cdot (s - r_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdot (s - p_n)} = \frac{(\text{閉ループ系の極})}{(\text{開ループ系の極})} \end{aligned}$$

$\Pi = (\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ の中で) 開ループ系の不安定極の数

知っている

$Z = (\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ の中で) 閉ループ系の不安定極の数

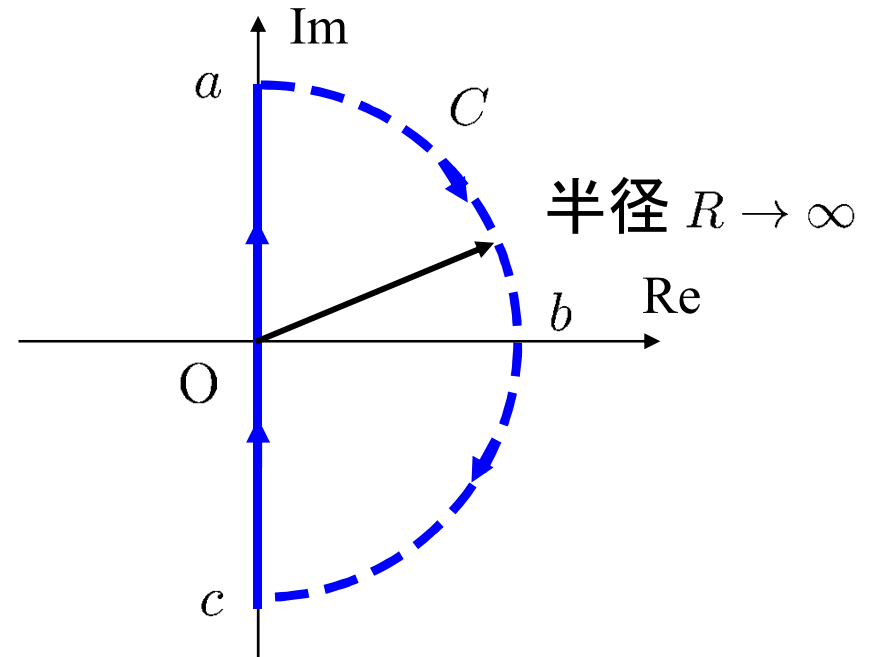
知りたい

s を $0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 0$

と時計方向に1回転

$s = 0, j, j10, j100, j\infty$

$-j\infty, -j100, -j10, -j, 0$



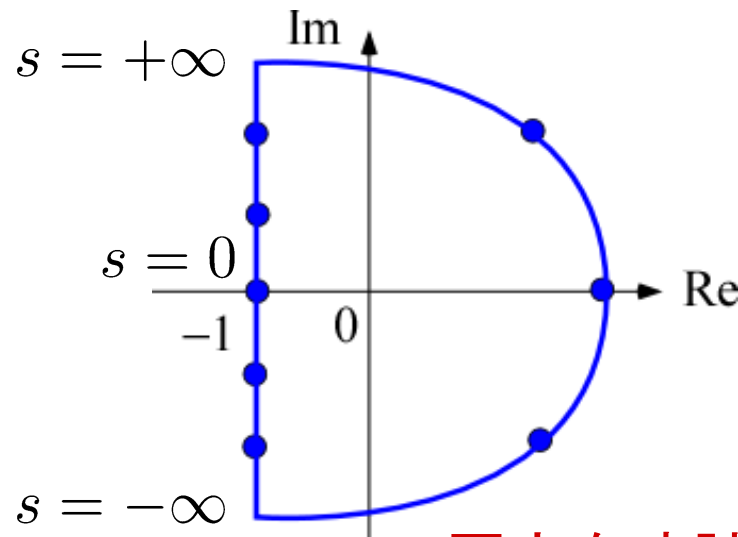
【例1】不安定(実部が正)の極

$$\phi(s) = D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) = s - 1$$

$$\phi(0) = -1$$

$$\phi(j) = j - 1$$

$$\phi(j10) = j10 - 1$$



原点を時計周りに1周回る 6

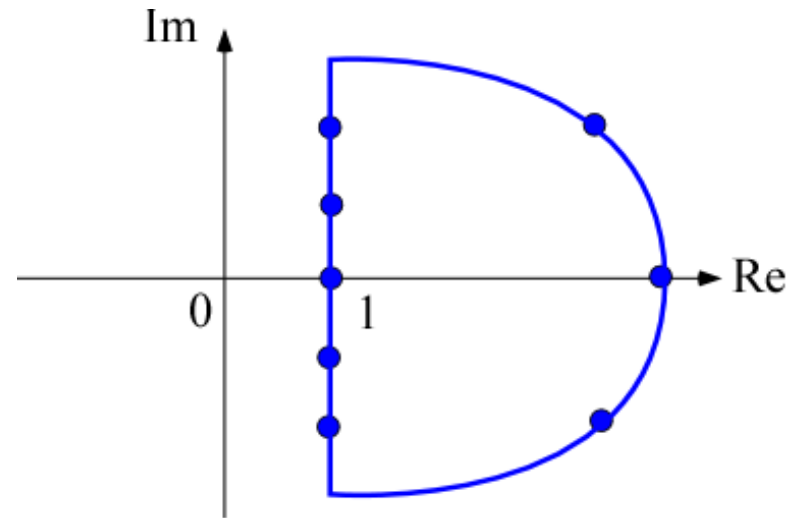
【例2】安定(実部が負)の極

$$\phi(s) = s + 1$$

$$\phi(0) = 1$$

$$\phi(j) = j + 1$$

$$\phi(j10) = j10 + 1$$



原点を時計周りに回っていない

原点を回ると不安定な極がある

よって

$$\frac{\angle(1 + P(s)K(s))}{N \text{ 回まわる}} = \frac{\angle(s - r_1) + \cdots + \angle(s - r_n)}{Z \text{ 回まわる}}$$

N 回まわる

Z 回まわる

(図から調べる)

$$- \frac{(\angle(s - p_1) + \cdots + \angle(s - p_n))}{\Pi \text{ 回まわる (式から調べる)}}$$

Π 回まわる (式から調べる)

$$N = Z - \Pi$$

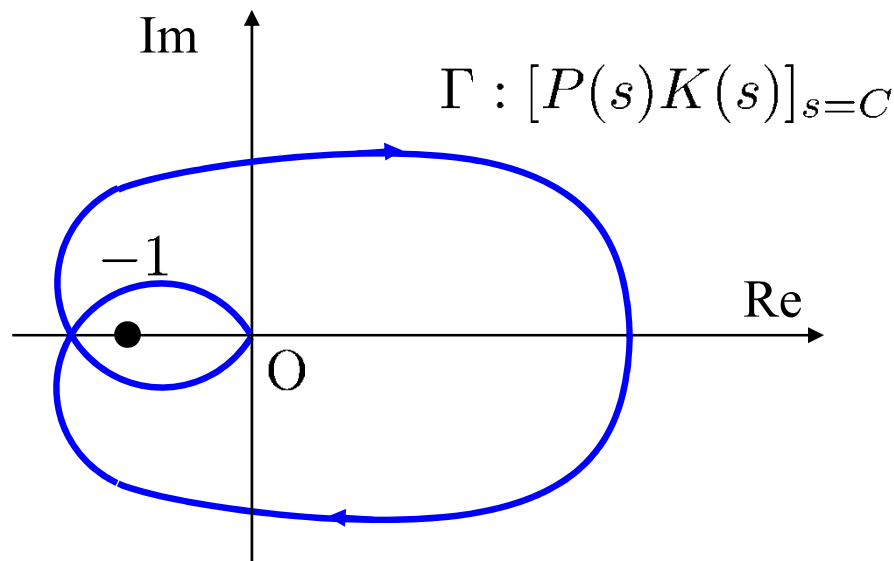
$$Z = N + \Pi$$

$Z = 0$ ならば安定

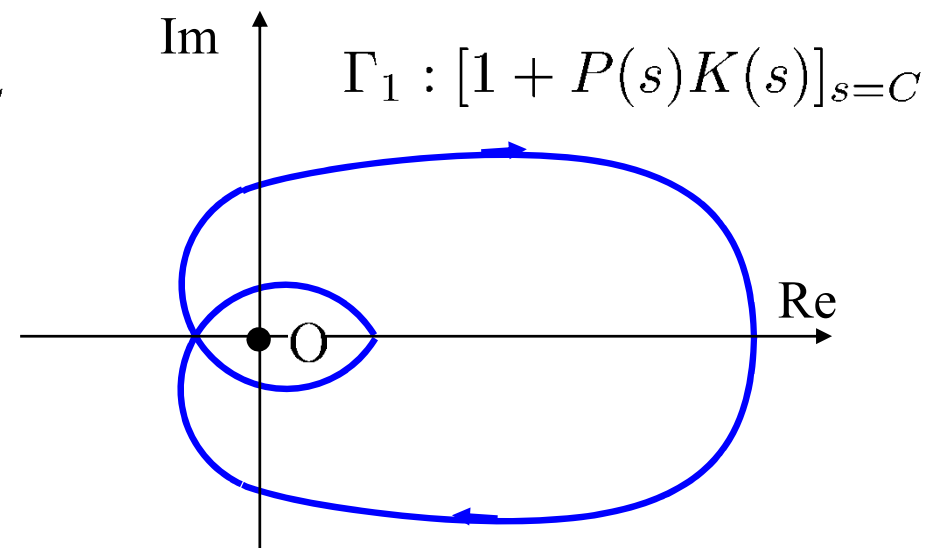
$D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$ に不安定極がない

$Z \neq 0$ ならば不安定

$\angle(1 + P(s)K(s))$ の回る回数の求め方



$P(s)K(s)$ が $(-1, 0)$ を回る



$1 + P(s)K(s)$ が原点を回る

ナイキストの安定判別法

- [ステップ 1] ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を描く. さらにこれを実軸に関して上下対称に描き, ナイキスト軌跡 Γ を得る.
- [ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ, これを N とする.
時計方向は+, 反時計方向は-とする.
- [ステップ 3] $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ, これを Π とする.
- [ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる.
したがって, $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定,
 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である.

[例 6.2]

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad K(s) = 30$$

[ステップ 1] ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を描く. さらにこれを実軸に関して上下対称に描き, ナイキスト軌跡 Γ を得る.

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{30}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{2+\omega^2}\sqrt{3+\omega^2}}$$

$$\omega = 0, \quad |L(0)| = \frac{30}{1 \times 2 \times 3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\angle L(0) = \angle 30 - \angle 3 = 0 - 0 = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |L(\infty)| = \frac{30}{\infty} = 0$$

$$\angle L(\infty) = \angle 30 - \angle j^3 = 0 - (270) = -270^\circ$$

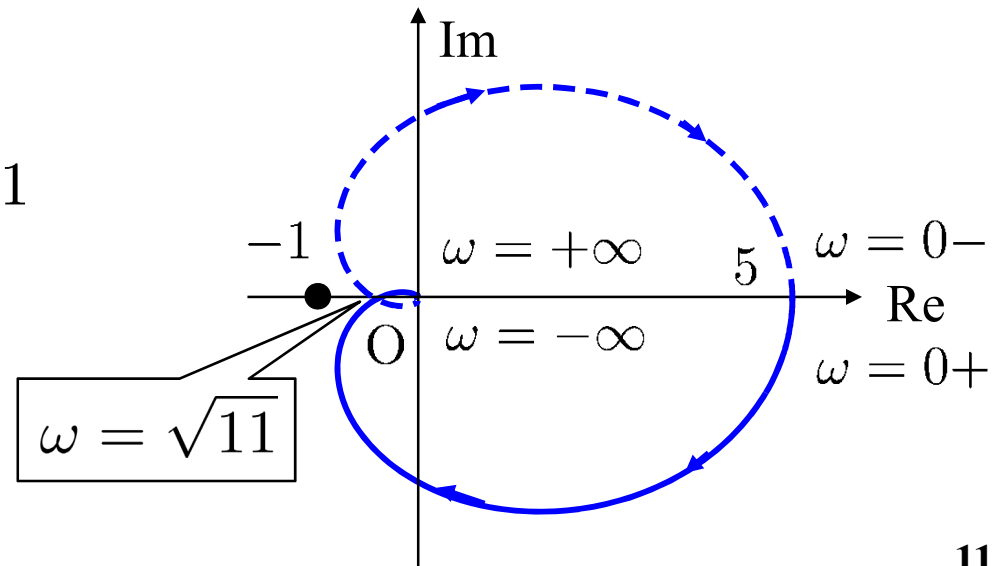
$$L(j\omega) = \frac{30}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$= \frac{30}{6 - 6\omega^2 + j\omega(-\omega^2 + 11)}$$

$\omega = 0, \pm\sqrt{11}$

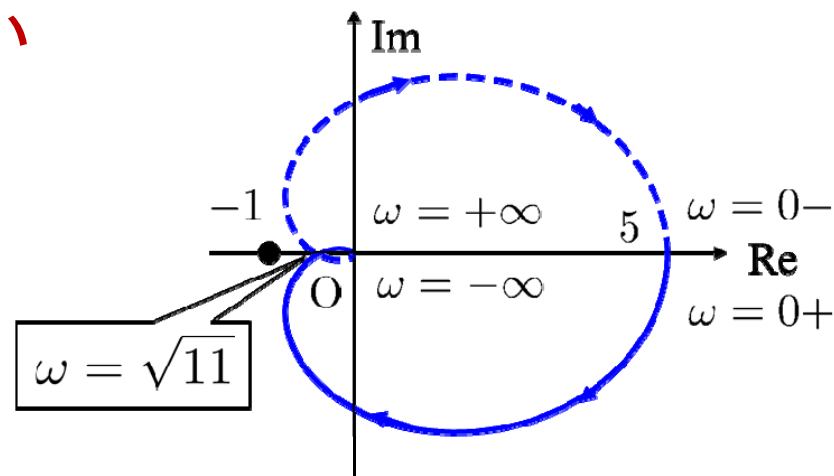
$\omega = \sqrt{11}$ のとき

$$L(j\sqrt{11}) = \frac{30}{6 - 6 \times 11} > -1$$



[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向に
まわる回数を調べ, これを N とする.
時計方向は+, 反時計方向は-とする.

$N = 0$ 回っていない



[ステップ 3] $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を
調べ, これを Π とする.

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$\Pi = 0$ 極: $-1, -2, -3$

[ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。
したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、
 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

$Z = N + \Pi = 0$ 閉ループ系の制御系は安定

[例 6.3] (不安定系の場合)

[ステップ 1] ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を描く. さらにこれを実軸に関して上下対称に描き, ナイキスト軌跡 Γ を得る.

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = 2$$

[ステップ 1]

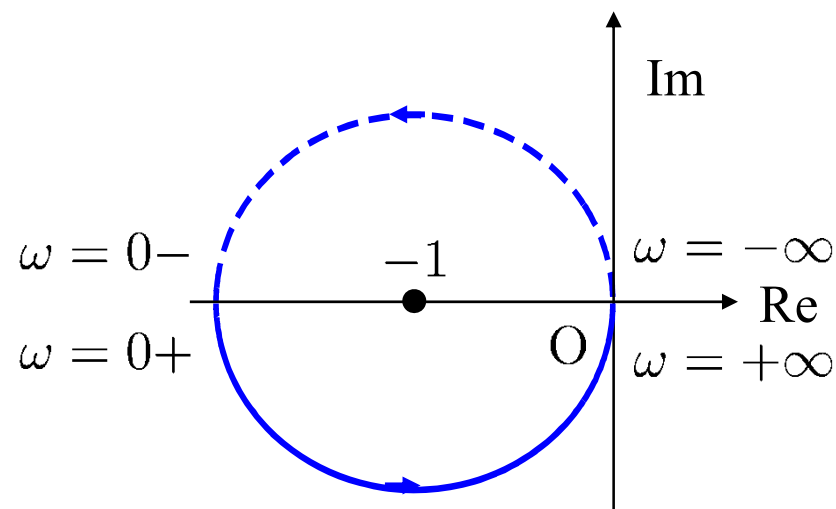
$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{2}{s-1}$$

$$\omega = 0, \quad |L(0)| = \left| \frac{2}{0-1} \right| = 2$$

$$\angle L(0) = \angle 2 - \angle -1 = 0 - (180) = -180^\circ$$

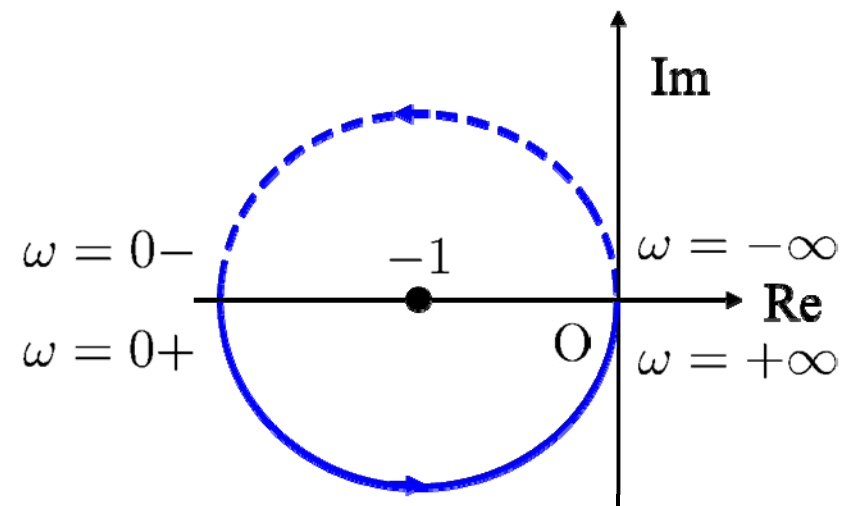
$$\omega \rightarrow \infty \quad |L(\infty)| = \left| \frac{2}{j\infty - 1} \right| = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\angle L(\infty) = \angle 2 - \angle j = 0 - (90) = -90^\circ$$



[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向に
まわる回数を調べ, これを N とする.
時計方向は+, 反時計方向は-とする.

$N = -1$ 反時計回方向に1回転



[ステップ 3] $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を
調べ, これを Π とする.

$\Pi = 1$ 極: 1

[ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。
したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、
 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

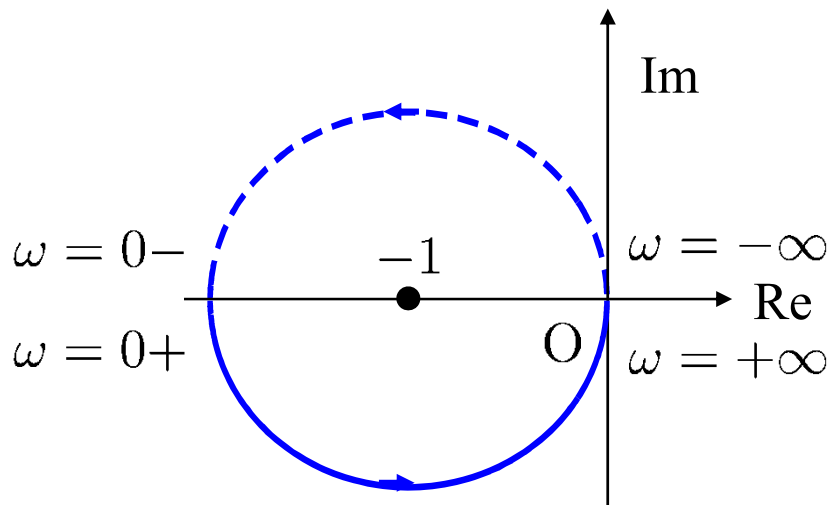
$$Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0 \quad \text{安定}$$

[例 6.3] (不安定系の場合)

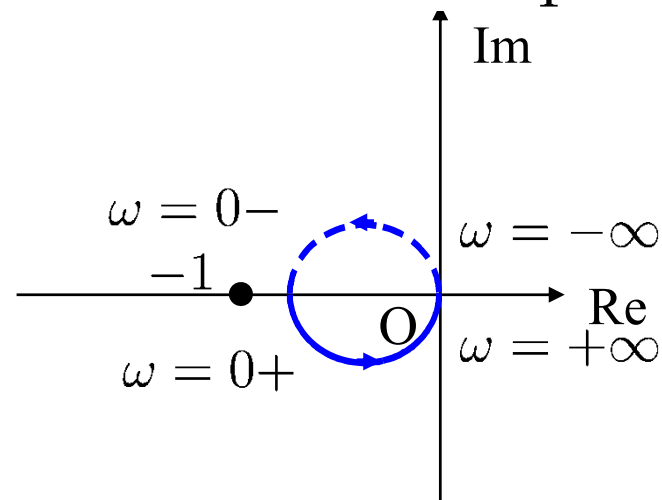
$$L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K = 2, \frac{3}{4}$$

[ステップ 1]

(a) $K = 2$



(b) $K = \frac{3}{4}$



[ステップ 2] $N = -1$

$N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 1$

$\Pi = 1$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$

$Z = N + \Pi = 0 + 1 = 1$

安定

不安定

$\neq 0$

第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード : ナイキストの安定判別法

学習目標 : ナイキストの安定判別法を理解し, フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。