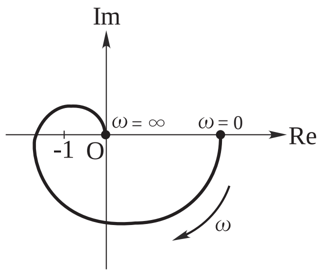
2022 年度 制御工学 II 前期 第 10 回レポート (模範解答)

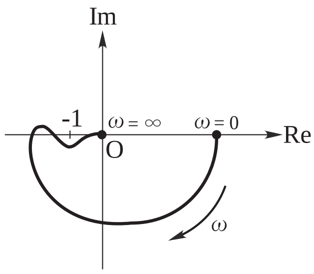
5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

[問題 1]

以下の図に示すベクトル軌跡を持つ制御系が安定であるかどうか 簡単化されたナイキストの安定判別法 を用いて判別せよ。ただし，Π は右半平面にある極の数を表している。



(c) $(\Pi = 0)$



(d) $(\Pi = 0)$

(解答)

(a) **(ステップ 1)** 問題より, いずれも右半平面には極がないので, 極の実部に正となるもはない。

(ステップ 2) ベクトル軌跡は問題に与えられている。

(ステップ 3) 点 (-1,0) を常に右に見えるように動く。

よって，不安定

(b) **(ステップ 1)** 問題より, いずれも右半平面には極がないので, 極の実部に正となるもはない。

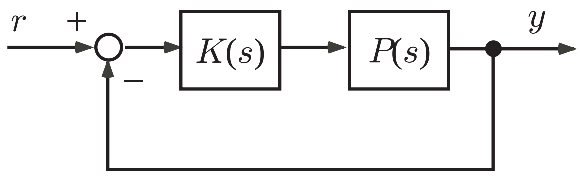
(ステップ 2) ベクトル軌跡は問題に与えられている。

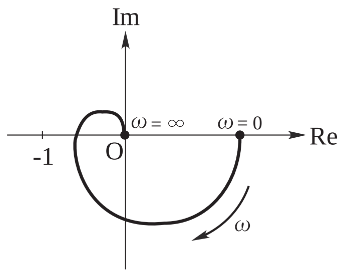
(ステップ 3) 点 (-1,0) を常に左に見えるように動く。

よって，安定

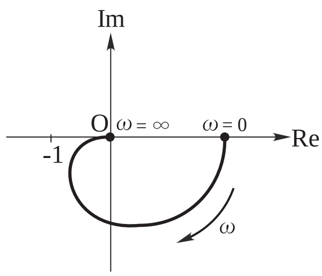
[問題 2]

以下の図に示すフィードバック制御について，ベクトル軌跡を持つ制御系が安定であるかどうかを 簡単化されたナイキストの安定判別法 を用いて判別せよ。





(a) $\left(P(s) = \frac{1}{(2s+1)(3s+1)},\ K(s) = \frac{1}{s+1}\right)$



(b) $\left(P(s) = \frac{1}{2s+1},\ K(s) = \frac{1}{s+1}\right)$

(解答)

簡単化されたナイキストの安定判別法

(a) **(ステップ 1)** 問題より, 開ループ伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$ の極は，-1，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$ より，右半平面には極がないので, 極の実部に正となるもはない。

(ステップ 2) ベクトル軌跡は問題に与えられている。

(ステップ 3) 点 (-1,0) を常に左に見えるように動く。

よって，安定

(b) **(ステップ 1)** 問題より, 開ループ伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$ の極は，-1，$-\frac{1}{2}$ より，いずれも右半平面には極がないので, 極の実部に正となるもはない。

(ステップ 2) ベクトル軌跡は問題に与えられている。

(ステップ 3) 点 (-1,0) を常に左に見えるように動く。

よって，安定

[問題 3] 開ループ伝達関数 $L(s)$ が以下のように与えられるとき，ベクトル軌跡の概形を描き，フィードバック制御系が安定となるゲイン K の範囲を求めよ。ただし，$T_i > 0$，$i = 1〜2$，$K > 0$ とする。

$$L(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{1}$$

(解答) ω が 0, ∞ のときの $L(s)$ のゲインと位相を求め, ベクトル軌跡を描く。$L(s)$ の周波数伝達関数は

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} \\ &= \frac{K}{-\omega^2(T_1 + T_2) + j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2)} \end{aligned} \tag{2}$$

より, ゲインは

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2(T_1 + T_2))^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2}} \tag{3}$$

で与えられる。よって, ω が 0, ∞ のときの $L(s)$ のゲインは

$$|L(0)| = \infty \qquad |L(\infty)| = 0 \tag{4}$$

となる。また, 位相は $\omega \approx 0$, $\omega \approx \infty$ において

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega} \quad (\omega \approx 0) \tag{5}$$

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{T_1 T_2 (j\omega)^3} \quad (\omega \approx \infty), \tag{6}$$

と近似できることから, 位相はそれぞれ

$$\angle L(0) = \angle \frac{1}{j} = -90^\circ \qquad \angle L(\infty) = \angle \frac{1}{(j)^3} = -270^\circ \tag{7}$$

となる。また，(2) 式から

$$L(j\omega) = \frac{K(-\omega^2(T_1 + T_2) - j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2))}{\omega^4(T_1 + T_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2} \tag{8}$$

となるから，その実部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[L(j\omega)] &= \frac{-K\omega^2(T_1 + T_2)}{\omega^4(T_1 + T_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-K(T_1 + T_2)}{\omega^2(T_1 + T_2)^2 + (1 - \omega^2 T_1 T_2)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。$\omega = 0$ では,

$$\mathrm{Re}[L(j\omega)] = -K(T_1 + T_2) \tag{10}$$

となる。よって, ベクトル軌跡の概形は 図 1 のようになる。

次にゲイン K の範囲を求める。ベクトル軌跡が実軸と交わる位相交差周波数 ω_{pc} は $\mathrm{Im}[L(j\omega)] = 0$ が成立することから

$$\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2)K = 0 \quad \text{より} \quad \omega_{pc} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \tag{11}$$

となる。このとき $\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})]$ は

$$\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})] = \frac{K}{-\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + j\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}(1 - 1)} = -\frac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2} \tag{12}$$

となる。安定となるためには, この点が $(-1, 0)$ を越えなければよいので

$$-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} > -1 \quad \text{つまり} \quad \underline{K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}} \tag{13}$$

を満たせばよい。

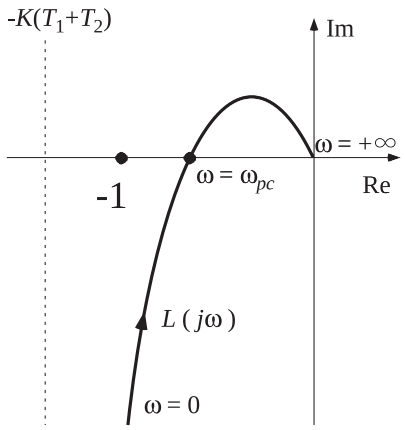


図 1: ベクトル軌跡