2023年度 計測制御工学 前期 第3回レポート (模範解答)

EM 専攻1年 番号 ________ 氏名 ____________________________

【問題 1】　次のシステム

$$2\ddot{z}(t) = u(t) - 4z(t) - 6\dot{z}(t) \tag{1}$$

において，状態を $x(t) = [z(t)\ \dot{z}(t)]$ としたとき，固有値は -1，-2 である。状態を $x(t) = [z(t)\ z(t) + \dot{z}(t)]$ としたときの固有値が -1，-2 となることを示せ。

【解答】

$\ddot{z}$ の係数で両辺を割って

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{2}u(t) - 2z(t) - 3\dot{z}(t) \tag{2}$$

より

$$\begin{aligned} \dot{z} + \ddot{z}(t) &= \dot{z} + \frac{1}{2}u(t) - 2z(t) - 3\dot{z}(t) \\ \dot{z} + \ddot{z}(t) &= \frac{1}{2}u(t) - 2z(t) - 2\dot{z}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。よって，状態方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) + \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) + \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t) \tag{4}$$

となる。固有値を求めると

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2) \tag{5}$$

よって，極は -1，-2 である。

【問題 2】　次の伝達関数が与えられたとき，可制御標準形 (A_c，B_c，C_c) を求めよ。

$$\frac{s}{2(s^2 + 3s + 2)} \tag{6}$$

【解答】

$$\frac{s}{2(s^2 + 3s + 2)} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3s + 2} \tag{7}$$

より

$$\underline{A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}} \tag{8}$$

$$\underline{B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \tag{9}$$

$$\underline{C_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}} \tag{10}$$

【問題 3】　状態空間表現が以下のように与えられたとき，伝達関数 $P(s)$ を求めることで，最小実現であるかどうかを判別せよ。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \tag{11}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

【解答】

$$\begin{aligned}
P(s) &= C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2s}{s(s+2)} \\
&= \underline{\frac{2}{s+2}}
\end{aligned} \tag{13}$$

よって，最小実現ではない。