

# 第2章 システムの状態空間表現

## 2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

キーワード：状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。

## 2 システムの状態空間表現

### 2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js^2 + \mu s}$$

$$(Js^2 + \mu s)y(s) = u(s)$$

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - \mu\dot{y}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

状態を変えると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) + \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(1 - \frac{\mu}{J}\right) & \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) + \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

システムの状態は唯一でないため、状態空間表現は無数に存在

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(1 - \frac{\mu}{J}\right) & \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s + 1 & -1 \\ \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) & s - \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \end{vmatrix} \\ &= (s + 1) \left( s - \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \right) + \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \\ &= s \left( s - \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \right) + \left( s - \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \right) + \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \\ &= s \left( s - \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \right) + s \\ &= s \left( s + \frac{\mu}{J} \right) \end{aligned}$$

**固有值**  $s = 0, -\frac{\mu}{J}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

**固有値**  $s = 0, -\frac{\mu}{J}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) + \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(1 - \frac{\mu}{J}\right) & \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) + \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

**固有値**  $s = 0, -\frac{\mu}{J}$

**固有値は、どのように状態を選んでも変わらない**

## 可制御標準形への変換

真にプロパーな規約な  $n$  次の伝達関数表現

$$P(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0} u(s)$$

は、可制御標準形と呼ばれる以下の  $n$  次の状態空間表現に変換できる。

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

## 可觀測標準形

$$\dot{x}_o(t) = A_o x_o(t) + B_o u(t)$$

$$y(t) = C_o x_o(t)$$

$$A_o = A_c^T$$

$$B_o = C_c^T$$

$$C_o = B_c^T$$

### 【例】問題2.6(2)

$$P(s) = \frac{4(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [8 \quad 4 \quad 0]$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_o = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$P(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} u(s)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]$$

## [ 問題 2.6(1) ]

伝達関数  $P(s)$  が与えられたとき, 可制御標準形  $A_c, B_c, C_c$ , 可観測標準形  $A_o, B_o, C_o$  を求めよ。

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

## 最小実現

$$y(t) = x_2(t) = \dot{z}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t) \quad \text{2次}$$

$$y(t) = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  でない

伝達関数を求める

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s \left( s + \frac{\mu}{J} \right)} \begin{bmatrix} s + \frac{\mu}{J} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \frac{1}{s \left( s + \frac{\mu}{J} \right)} \begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{Js + \mu} \quad \text{1次} \end{aligned}$$



## 状態空間表現を求める

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js + \mu}$$

$$(Js + \mu)y(s) = u(s)$$

$$J\dot{y}(t) + \mu y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{J}y(t) + \frac{1}{J}u(t)$$

状態空間表現は次のようになる

$$\dot{x}(t) = \frac{\mu}{J}x(t) + \frac{1}{J}u(t) \quad \text{1次}$$

$$y(t) = x(t)$$

 同じシステム

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t) \quad \text{2次}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

状態空間表現は2次だが、伝達関数は1次のため、最小実現でない、

# 行列の大きさ

$$1 \quad [1 \quad 2 \quad 3] \quad \begin{matrix} & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{1行3列}$$

$$1 \quad [1 \quad 2 \quad 3] \quad \begin{matrix} 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix} = * \quad \text{1行1列}$$

## [ MATLAB演習 ]

### 2.5.3

- $[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$
- $\text{Ss\_Pb} = \text{ss2ss}(\text{ss\_P}, T)$

## [ Scilab演習 ]

$s = \text{poly}(0, 's')$

$H = (4*s+8)/(s^3+3*s^2+4*s+2)$

$\text{ss\_P} = \text{tf2ss}(H);$

変換ミスが多い

- $\text{ss\_Pb} = \text{ss2ss}(\text{ss\_P}, T)$

### 2.5.4

- $\text{Ss\_P\_min} = \text{ss}(\text{ss\_P}, 'min')$

- $\text{ss\_P} = \text{syslin}('c', A, B, C, D)$

$\text{Ss\_P\_min} = \text{minss}(\text{ss\_P})$

## [ 問題 2.7(2) ]

### 1 入出力システムの状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

における  $c$  が以下のように与えられたとき, 伝達関数  $P(s)$  を求めることで, 最小実現であるかどうかを判別せよ。

$$c = [1 \ 1]$$

## 第2章 システムの状態空間表現

### 2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

キーワード：状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。