

2023 年度 計測制御工学 前期 第 4 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 _____ 氏名 _____

【問題 1】

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

において、遷移行列 e^{At} を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+4) + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \quad (1-1) \end{aligned}$$

と分解でき、係数行列 K_1, K_2 を用いて次のように分解できる。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s+1}K_1 + \frac{1}{s+3}K_2 \quad (1-2)$$

係数行列 K_1, K_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_1 &= (s+1)(sI - A)^{-1} \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (1-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= (s+3)(sI - A)^{-1} \Big|_{s=-3} \\ &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \quad (1-4) \end{aligned}$$

遷移行列は次のようになる。

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} e^{-3t} \quad (1-5)$$

【問題 2】

【問題 1】の遷移行列 e^{At} を用いて、出力 $y(t)$ を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) = Ce^{At}x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} e^{-3t} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} e^{-3t} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underline{3e^{-t} - e^{-3t}} \quad (2-1) \end{aligned}$$