2023 年度 計測制御工学 前期 第 5 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 ________ 氏名 ____________________

【問題 1】

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = 0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

において，固有ベクトルを用いて，遷移行列 e^{At} を求めよ。

【解答】

固有値を求める。

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+3)+2 \\ &= s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) \end{aligned} \tag{1-1}$$

ゆえに，固有値は以下のようになる。

$$\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -2 \tag{1-2}$$

固有ベクトル v_1，v_2 を定義する。λ_1 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{gathered} (\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{1-3}$$

よって，固有ベクトル v_1 は次のようになる。

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

λ_2 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

よって，固有ベクトル v_2 は次のようになる。

$$v_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

ここで，

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

となるから

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{\Lambda t}S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{\alpha\beta}\right) \begin{bmatrix} -2\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} & \beta e^{-2t} \\ -\alpha e^{-t} & -2\beta e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta} \begin{bmatrix} -2\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-2t} & -\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-2t} \\ 2\alpha\beta e^{-t} - 2\alpha\beta e^{-2t} & \alpha\beta e^{-t} - 2\alpha\beta e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \end{aligned} \tag{1-9}$$

【問題 2】

【問題 1】の遷移行列 e^{At} を用いて，単位ステップ応答 $y(t)$ を求めよ。

【解答】

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t)d\tau \tag{2-1}$$

$\tilde{\tau} = t - \tau$ とおくと，$\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -1$ より

$$\begin{array}{c|ccc} \tau & 0 & \to & t \\ \hline \tilde{\tau} & t & \to & 0 \end{array} \tag{2-2}$$

となる。

$$\begin{aligned} y(t) &= -C\int_t^0 e^{A\tilde{\tau}}Bu(t)d\tilde{\tau} = C\int_0^t e^{A\tilde{\tau}}Bd\tilde{\tau} \\ &= -C\int_t^0 \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-\tilde{\tau}} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2\tilde{\tau}} \right) Bu(t)d\tilde{\tau} \end{aligned} \tag{2-3}$$

積分

$$\int_0^t e^{-\tilde{\tau}} = -\left[e^{-\tilde{\tau}}\right]_0^t = -\left(e^{-t} - 1\right) \tag{2-4}$$

$$\int_0^t e^{-2\tilde{\tau}} = -\frac{1}{2}\left[e^{-2\tilde{\tau}}\right]_0^t = -\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right) \tag{2-5}$$

より，

$$\begin{aligned} y(t) &= C\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \left(1 - e^{-t}\right) - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \right) Bu(t) \\ &= C\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) B \\ &= C\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{aligned} \tag{2-6}$$

【別解】

$$\begin{aligned} y(t) &= C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t)d\tau \\ &= Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(t)d\tau \end{aligned} \tag{2-7}$$

e^{At} は

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \end{aligned} \tag{2-8}$$

より

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

とおく。e^{-At} は

$$\begin{aligned} e^{-At} &= \frac{1}{|e^{-At}|}\begin{vmatrix} -e^{-t}+2e^{-2t} & -(e^{-t}-e^{-2t}) \\ -(-2e^{-t}+2e^{-2t}) & 2e^{-t}-e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{e^{-3t}}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{e^{-3t}}\left(-K_2e^{-t} - (-K_1)e^{-2t}\right) \\ &= -K_2e^{2t} + K_1e^{t} \end{aligned} \tag{2-10}$$

ここで,

$$\begin{aligned} |e^{-At}| &= (2e^{-t}-e^{-2t})(-e^{-t}+2e^{-2t}) \\ &\quad -(e^{-t}-e^{-2t})(-2e^{-t}+2e^{-2t}) \\ &= e^{-3t} \end{aligned} \tag{2-11}$$

である。