

第3章 線形システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

3.3 線形システムの極と安定性・過渡特性

キーワード：遷移行列, 時間応答, 安定性

学習目標：対角化による遷移行列の求め, 時間応答が計算できるようになる。極と安定性, 過渡特性について理解する。

対角化による遷移行列の求め方

$A \in R^{n \times n}$: 実数でn行n列

$$S^{-1}AS = \Lambda \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S := [v_1, \dots, v_n], \quad \Lambda := \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

v_1, \dots, v_n 固有ベクトル

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 固有値

[例3.5]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s + 11 \end{vmatrix} = s(s + 11) + 10 = s^2 + 11s + 10 \\ &= (s + 10)(s + 1) \end{aligned}$$

固有値 $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = -10$ に対する固有
ベクトルを求める

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -10v_{11} - v_{12} = 0 \\ 10v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = [\alpha, -10\alpha]^T$$

$\alpha \neq 0$ は任意の実数

$\lambda_2 = -1$ に対する固有
ベクトルを求める

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_{21} - v_{22} = 0 \\ 10v_{21} + 10v_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = [\beta, -\beta]^T$$

$\beta \neq 0$ は任意の実数

よって

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix}}_{= S} \underbrace{\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{= \Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix}^{-1}}_{= S^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
A^k &= (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1}) \\
&= \underbrace{S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}\cdots S\Lambda S^{-1}} \\
&= I \\
&= S\Lambda\Lambda\cdots\Lambda S^{-1} \\
&= S\Lambda^k S^{-1}
\end{aligned}$$

を用いて

遷移行列

$$\begin{aligned}
e^{At} &:= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \\
&= I + tS\Lambda S^{-1} + \frac{t^2}{2!}S\Lambda^2 S^{-1} + \cdots + \frac{t^k}{k!}S\Lambda^k S^{-1} + \cdots \\
&= S \left(I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\Lambda^k + \cdots \right) S^{-1} \\
&= S e^{\Lambda t} S^{-1}
\end{aligned}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ のとき}$$

$$e^{\Lambda t} = I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}\Lambda^k + \dots$$

$$= I + t \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k + \dots$$

$$= I + t \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} (-10)^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} + \dots + \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} (-10)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} + \dots$$

$$= e^{-10t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + t(-10) + \frac{t^2}{2!}(-10)^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + t(-1) + \frac{t^2}{2!}(-1)^2 + \dots \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-10t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-t}$$

$$= \lambda_2$$

対角化による遷移行列の求め方

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} \quad e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$$
$$S := [v_1, \dots, v_n]$$

$$S = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-10t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-10t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{9\alpha\beta} \begin{bmatrix} -\beta & -\beta \\ 10\alpha & \alpha \end{bmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -e^{-10t} + 10e^{-t} & -e^{-10t} + e^{-t} \\ 10e^{-10t} - 10e^{-t} & 10e^{-10t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

任意時間応答

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.60)$$

[例]

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = e^{At} z(t) \quad (3.61)$$

と仮定して微分すると

$$\dot{x}(t) = Ae^{At} z(t) + e^{At} \dot{z}(t) \quad (3.62)$$

(3.60) 式より

$$\begin{aligned} \underline{Ax(t)} + Bu(t) &= Ae^{At} z(t) + e^{At} \dot{z}(t) \\ &= e^{At} z(t) \\ \underline{Ae^{At} z(t)} + Bu(t) &= \underline{Ae^{At} z(t)} + e^{At} \dot{z}(t) \end{aligned}$$

$$Bu(t) = e^{At} \dot{z}(t) \quad (3.63)$$

(3.62) 式から

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}z(t) + Bu(t)$$

(3.63) 式から

$$e^{At}\dot{z}(t) = Bu(t)$$

$$\dot{z}(t) = (e^{At})^{-1}Bu(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$z(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + \alpha$$

初期値を考慮すると

$$x_0 = e^{-A \times 0}z(0) = Iz(0), \quad z(0) = x_0$$

$$\alpha = z(0) - \int_0^0 e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = z(0) = x_0$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At} z(t) = e^{At} \alpha + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \\
 &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

n 次システムの時間応答

$$y = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\text{零入力応答}} + \underbrace{C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{零状態応答}}$$

零入力応答

零状態応答

[MATLAB演習]

3.4.2 遷移行列

3.4.4 時間応答

【例3.6】単位ステップ応答(零状態応答)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$$y = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\text{零入力応答}} + \underbrace{C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{零状態応答 } y_1(t)}$$

零入力応答

零状態応答 $y_1(t)$

$$y_1(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$\tilde{\tau} = t - \tau \text{ とおく} \quad \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -1 \quad \begin{array}{c|c} \tau & 0 \\ \hline \tilde{\tau} & t \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow t \\ \rightarrow 0 \end{array}$$

$$y_1(t) = -C \int_t^0 e^{A\tilde{\tau}} B u(\tau) d\tilde{\tau}$$

$u(t) = 1$ より

$$y_1(t) = C \int_0^t e^{A\tilde{\tau}} B d\tilde{\tau}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= C \int_0^t \underline{e^{A\tilde{\tau}} B d\tilde{\tau}} \\
&= \frac{1}{9} \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} e^{-10\tilde{\tau}} + \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} e^{-\tilde{\tau}} \right) \\
&= C \int_0^t \frac{1}{9} \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} e^{-10\tilde{\tau}} + \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} e^{-\tilde{\tau}} \right) B d\tilde{\tau} \\
\int_0^t e^{-10\tilde{\tau}} &= [e^{-10\tilde{\tau}}]_0^t = -\frac{1}{10} (e^{-10t} - 1) \\
\int_0^t e^{-\tilde{\tau}} &= [e^{-\tilde{\tau}}]_0^t = -(e^{-t} - 1) \\
&= \frac{1}{9} C \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \frac{1}{-10} (e^{-10t} - 1) \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{-1} (e^{-t} - 1) \right) B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} C \left(\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} e^{-10t} - \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} \right) \\
&= \frac{1}{9} C \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} + 10 & -\frac{1}{10} + 1 \\ 1 - 10 & 1 - 1 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} e^{-10t} - \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} \right) \\
&= \frac{1}{9} C \left(\begin{bmatrix} \frac{99}{10} & \frac{9}{10} \\ -9 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} e^{-10t} - \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} \right) \\
&= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{99}{10} & \frac{9}{10} \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} e^{-10t} - \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \left(\begin{bmatrix} \frac{99}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} e^{-10t} - \begin{bmatrix} 10 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}(-1)e^{-10t} - e^{-t} \right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{90}e^{-10t} - \frac{1}{9}e^{-t} \end{aligned}$$

[問題 3.4(1)]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 0]$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1$$

$y(t)$ (単位ステップ入力)を求めよ。

3 線形システムの時間応答

3.3 線形システムの極と安定性・過渡特性

漸近安定性の定義

零入力システム

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

における状態方程式の解 $x(t) = e^{At}x_0$ が, “任意の初期状態 $x(0) = x_0$ に対して $t \rightarrow \infty$ で $x(t) \rightarrow 0$ ” となるとき, 線形システム

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

は漸近安定であるという。

線形システムの漸近安定性の判別

線形システムの極を $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$) とする。このとき、極の実部 $\text{Re}[\lambda]$ がすべて負であれば、そのときに限り、線形システムは漸近安定である。それに対し、線形システムの極の実部が一つでも正であれば、線形システムは不安定である。

[例3.7]

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{固有値 } -10 \quad -1$$

$$e^{At} = \underbrace{K_1 e^{-10t}}_{0 (t \rightarrow \infty)} + \underbrace{K_2 e^{-t}}_{0 (t \rightarrow \infty)} \quad \text{漸近安定}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{固有値 } -1 \pm 3j$$

$$e^{At} = \underbrace{K_1 e^{-t} \cos(3t)}_{0 (t \rightarrow \infty)} + \underbrace{K_2 e^{-t} \sin(3t)}_{0 (t \rightarrow \infty)} \quad \text{漸近安定}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{固有値 } -2, 1$$

$$e^{At} = \underbrace{K_1 e^{-2t}} + \underbrace{K_2 e^t}$$

$$0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

不安定

有界入力有界出力安定性

初期状態を $x(0) = x_0$ とした線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

において、 $u(t)$ が有界 ($\|u(t)\| \leq M_u$) とであるとする。このとき、ある正の定数 M_u, M_y に対し、“任意の有界な $u(t)$ に対して $y(t)$ が有界 ($\|y(t)\| \leq M_y$)” であるとき、線形システム (3.27) 式は有界入力有界出力安定であるという。

極と時間応答の過渡特性

極の実部 $\alpha_i < 0$ が負側に大きいほど速やかに零に収束する

極の虚部 $\beta_i > 0$ が大きいほど振動周期は短い

[MATLAB演習]

3.4.5 システムの極と漸近安定性

第3章 線形システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

3.3 線形システムの極と安定性・過渡特性

キーワード：遷移行列, 時間応答, 安定性

学習目標：対角化による遷移行列の求め, 時間応答が計算できるようになる。極と安定性, 過渡特性について理解する。