第 4 章　状態フィードバックによる制御

4.1　状態フィードバックによるレギュレータ制御

4.2　可制御性

キーワード：状態フィードバック，可制御性

学習目標：状態フィードバックにより，可安定，可制御を理解する。

4 状態フィードバックによる制御

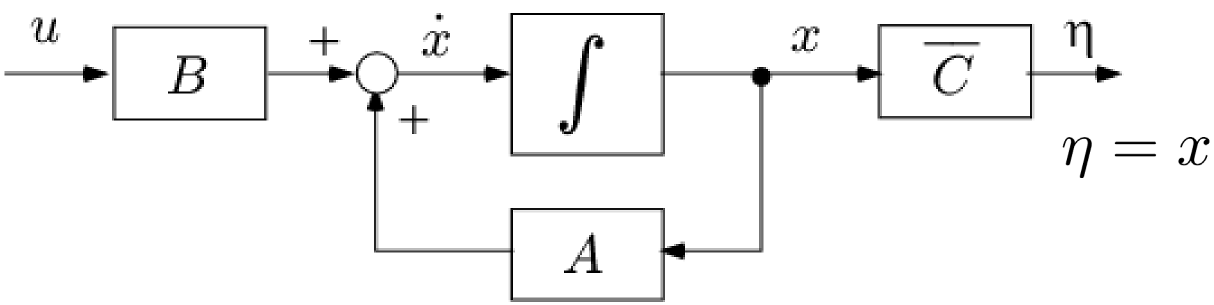
4.1 状態フィードバックによるレギュレータ制御

システム

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t)\end{cases}$$

$x(t) \in R^n$:状態変数　$u(t) \in R^p$:操作量　$\eta(t) \in R^r$:観測量

状態変数$x(t)$がすべて利用可能 $(\bar{C} = I)$



レギュレータ制御

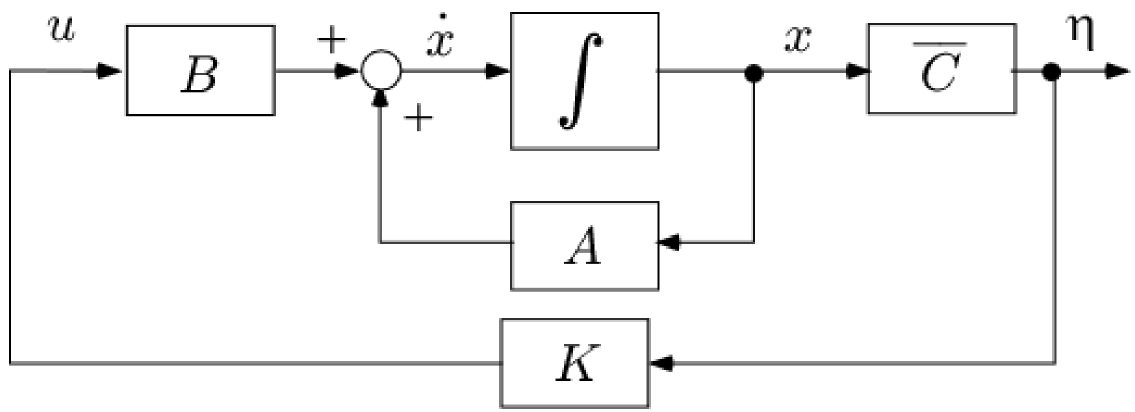
システム$\mathcal{P}$ が与えられたとき，任意の初期状態$x(0) = x_0$ に対し，状態変数 $x(t)$ を$x(t) \to 0$ に制御する。

状態フィードバック形式のコントローラ

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t), \qquad K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & \cdots & k_{pn} \end{bmatrix}$$

$(\bar{C} = I)$

$\eta = x$



レギュレータ問題（定置制御）

一定の値に保持

例：人工衛星の姿勢制御など

http://www.jaxa.jp/projects/sat/

サーボ問題（追従制御）

目標値に良好に追従

例：ロケットの自動操縦など

http://www.jaxa.jp/projects/rockets/h3/index_j.html

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), & x(0)=x_0\\ \eta(t)=\bar{C}x(t) & (\bar{C}=I)\end{cases}$$

$$\mathcal{K}:u(t)=Kx(t),$$

これらから

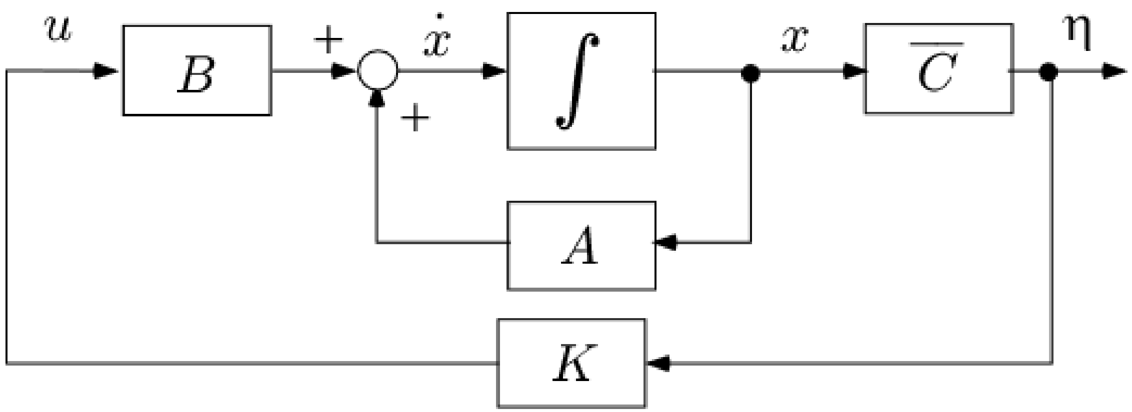
$$\dot{x}(t)=Ax(t)+BKx(t)=\underbrace{(A+BK)}_{A_{cl}}x(t)=A_{cl}x(t)$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{A_{cl}t}x_0$$

A_{cl} の固有値の実部がすべて負となるようにK を選ぶことができれば

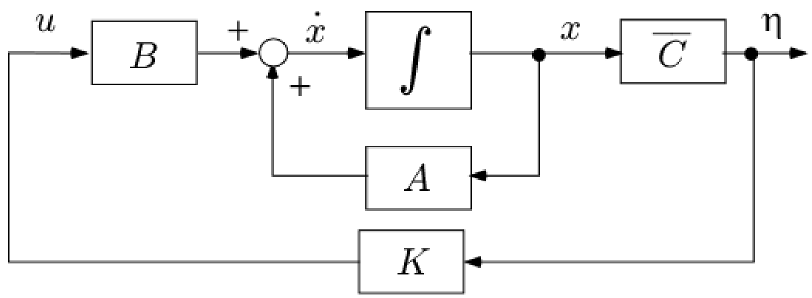
$$x(t)=e^{A_{cl}t}x_0 \ \rightarrow \ 0$$

システムが可安定である



【例】 可安定

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1-1}{R_1C_1} & \frac{K_2}{R_1C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}$$

$$|sI - (A + BK)| = \begin{vmatrix} s - \frac{K_1-1}{R_1C_1} & -\frac{K_2}{R_1C_1} \\ 0 & s + \frac{1}{R_2C_2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(s - \frac{K_1 - 1}{R_1C_1} \right) \left(s + \frac{1}{R_2C_2} \right)$$

固有値 $\boxed{\frac{K_1 - 1}{R_1C_1}}, \boxed{-\frac{1}{R_2C_2}}$

K に関係なく安定

$K_1 < 1$ なら固有値の実部が負 ➡ 可安定

4 状態フィードバックによる制御

4.2 可制御性

システムが可制御

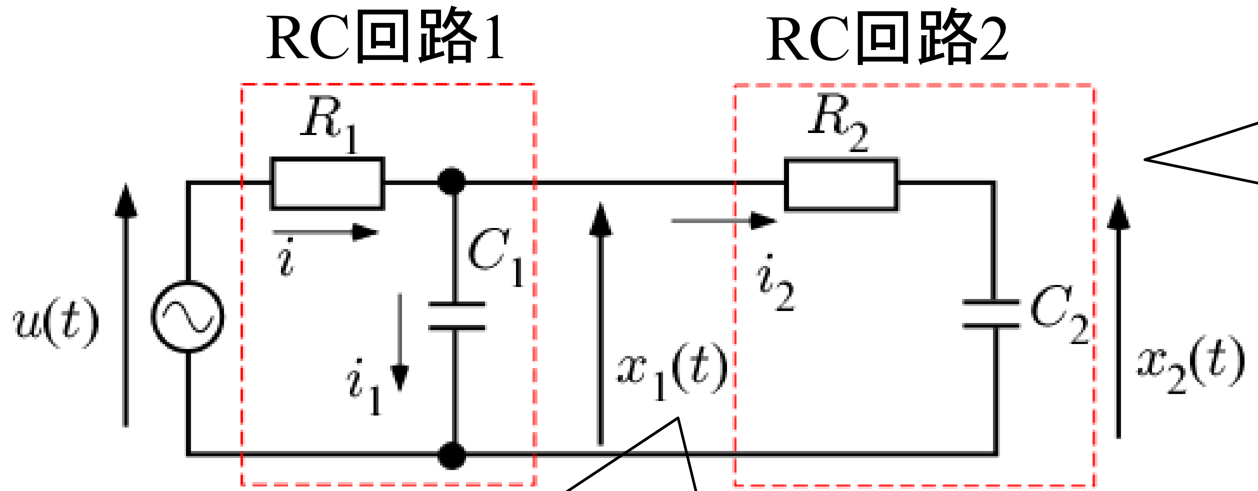
操作量$u(t)$を適当に操作することで，システムの状態$x(t)$を設計者の指定した時間に目標とする状態へ移すことが可能

可制御性の定義

線形システム(4.2)式に対し，ある有限の時間 $t = t_f$ で任意の初期状態 $x(0) = x_0$ を任意の目標とする状態 x_f に移す操作量 $u(t)$ が存在することを“システムが可制御である”という。また，システムが可制御でないとき，“システムが不可制御である”という。

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

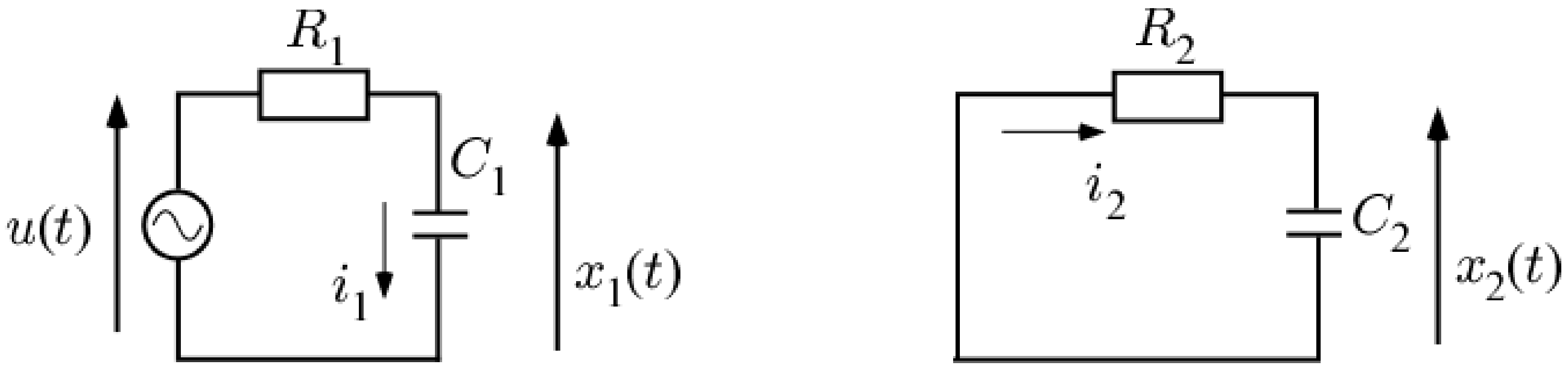
【例4.1】 可制御



RC回路1を介し $u(t)$ により間接的に制御可能

$u(t)$ により直接的に制御可能

【例4.1】 不可制御



連結されていない2つのシステムを1つの操作量 $u(t)$ で制御することは不可能

可制御性の判別

可制御行列 V_C ，可制御性グラミアン $W_C(t_f)$

$$V_C := \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in R^{n \times np}$$

$$W_C(t_f) := \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} \, d\tau \in R^{n \times n}$$

“線形システム(4.2)式が可制御である” (A, B) が可制御ことと，以下の条件(a)や条件(b)は等価

(a) 可制御性行列 V_C がランク条件を満足する

$$\mathrm{rank}\ V_C = n$$ （行フルランク）

正方行列の場合 $\mathrm{rank} V_C = n \quad \Leftrightarrow \quad |V_C| \neq 0$

(b) 可制御性グラミアン $W_C(t_f)$ が正則

正則 : 逆行列が存在する

[例4.2]

(1)
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} & -\frac{R_1+R_2}{R_1^2R_2C_1^2} \\ 0 & \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} \end{bmatrix}$$

正方行列の場合 $\mathrm{rank}V_C = n \quad \Leftrightarrow \quad |V_C| \neq 0$

$$|V_C| = \frac{1}{R_1^2R_2C_1^2C_2} \neq 0$$ 可制御

(2)
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} & -\frac{1}{R_1^2C_1^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |V_C| = 0$$ 不可制御

[問題4.1]

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

[問題4.1]

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$|V_C| = -2 \neq 0$ **可制御**

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$V_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$|V_C| = 0$ **不可制御**

(a) 可制御性行列 V_C がランク条件を満足する

$$\mathrm{rank} V_C = n$$ （行フルランク）

（証明）可制御⇒(a)

$$x(t_f) = x_f = e^{At_f} x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

両辺に左から e^{-At_f} をかける

$$e^{-At_f} x(t_f) - x_0 = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^{t_f} \left(I + t(-A) + \frac{t^2}{2!} A^2 \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) B u(\tau)\, d\tau$$

ケーリー・ハミルトンの定理

$$A^n = -\left(\alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0 I \right)$$ 次数を下げることができる

よって

$$e^{-At_f} x(t_f) - x_0 = \int_0^{t_f} \left(\beta_{n-1}(-\tau) A^{n-1} + \cdots + \beta_1(-\tau) A + \beta_0(-\tau) I \right) B u(\tau)\, d\tau$$

$$e^{-At_f}x(t_f) - x_0 = A^{n-1}B\int_0^{t_f} \beta_{n-1}(-\tau)u(\tau)\ d\tau + AB\int_0^{t_f} \beta_1(-\tau)u(\tau)\ d\tau$$
$$+B\int_0^{t_f} \beta_0(-\tau)u(\tau)\ d\tau$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{V_C} \begin{bmatrix} \int_0^{t_f} \beta_0(-\tau)u(\tau) \\ \int_0^{t_f} \beta_1(-\tau)u(\tau) \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} \beta_{n-1}(-\tau)u(\tau) \end{bmatrix}$$

任意の $x(t_f)$，x_0 に対して，$u(t)$ が存在しないといけないため

$\mathrm{rank} V_C = n$ （行フルランク）

ケーリー・ハミルトンの定理

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0 I = 0$$

【例】

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{vmatrix} = s(s+11) + 10 = s^2 + 11s + 10$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}^2 + 11 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & -11 \\ 110 & 111 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -110 & -121 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

［例］ $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\end{bmatrix} = 1$ のとき

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}u_1 + 3u_2 + 5u_3\\ 2(u_1 + 3u_2 + 5u_3)\end{bmatrix}}$$

どのように u_1, u_2, u_3 を設定しても，2行目は1行目の2倍

$\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$ を満たす u_1, u_2, u_3 を設定せよ

u_3 を与えたとき

$$\begin{bmatrix}1 - 5u_3\\ 4 - 10u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 - 5u_3\\ 4 - 10u_3\end{bmatrix}$$

u_1 を与えたとき

$$\begin{bmatrix}1 - u_1\\ 4 - 2u_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 5\\ 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 5\\ 6 & 10\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 - u_1\\ 4 - 2u_1\end{bmatrix}$$

は逆行列が存在しないので，求まらない

[例]　$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 6 & 5\end{bmatrix} = 2$　のとき

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}u_1+3u_2+5u_3\\2u_1+6u_2+5u_3\end{bmatrix}}$$

任意に設定した2行目と1行目を満たす u_1, u_2, u_3 が存在

$$\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$ を満たす u_1, u_2, u_3 を設定せよ

u_3 を与えたとき

$$\begin{bmatrix}1-5u_3\\4-10u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1-5u_3\\4-10u_3\end{bmatrix}$$

は逆行列が存在しないので，求まらない

u_1 を与えたき

$$\begin{bmatrix}1-u_1\\4-2u_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 5\\6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 5\\6 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1-u_1\\4-2u_1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-15}\begin{bmatrix}5 & -5\\-6 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1-u_1\\4-2u_1\end{bmatrix}$$

求まる

（MATLABが使える人は）

［ MATLAB演習 ］

4.4.1　可制御性

問題 4.8(1)

第 4 章　状態フィードバックによる制御

4.1　状態フィードバックによるレギュレータ制御

4.2　可制御性

キーワード：状態フィードバック，可制御性

学習目標：状態フィードバックにより，可安定，可制御を理解する。