

第4章 状態フィードバックによる制御

4.3 極配置によるコントローラ設計

キーワード：極配置

学習目標：状態フィードバックによりレギュレータ制御を理解する。極配置法について理解する。

4 状態フィードバックによる制御

4.3 極配置によるコントローラ設計

極配置法

極が指定した値となるように K を設計する

可制御性と極配置の実現可能性との関係

以下の条件 (i) と条件 (ii) は等価である。

- (i) 線形システム (4.2) 式が可制御である。
- (ii) K を適当に選ぶことにより, $A + BK$ の固有値を, 任意の値に設定可能である。

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) & (\bar{C} = I) \end{cases}$$

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t),$$

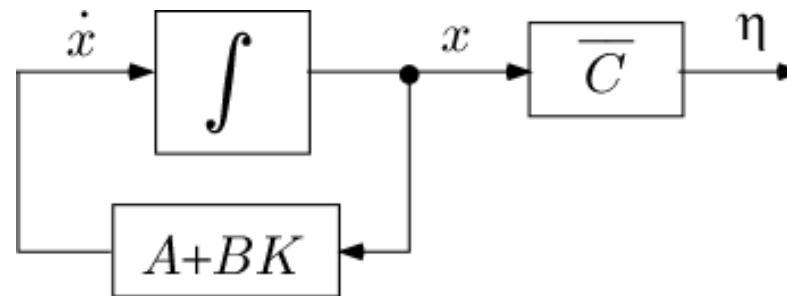
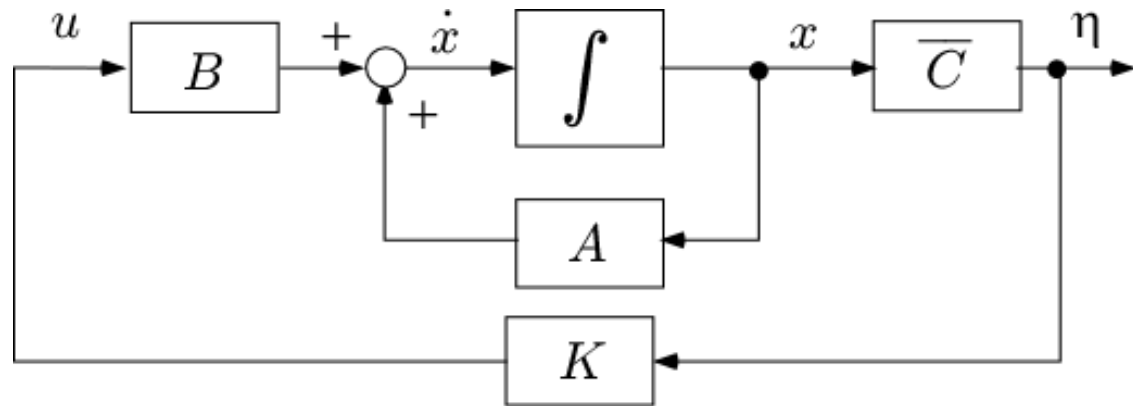
これらから

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t)$$

$$= \underline{(A + BK)}x(t)$$

$$A_{cl}$$

$$= A_{cl}x(t)$$



[例4.3]

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

可制御の確認

$$V_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|V_C| = 4 \times 2 = 8 \neq 0 \quad \text{可制御}$$

$$A_{cl} := A + BK$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 & 2k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 + 2k_1 & 1 + 2k_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$A_{cl} := A + BK$ の特性方程式

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 - 2k_1 & -(1 + 2k_2) \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 3 - 2k_1)(\lambda + 2) - 2(1 + 2k_2) \\ &= \lambda^2 + (3 - 2k_1)\lambda + 2\lambda + 2(3 - 2k_1) - 2(1 + 2k_2) \\ &= \lambda^2 + (5 - 2k_1)\lambda + 4(1 - k_1 - k_2) = 0 \end{aligned}$$

A_{cl} の固有値 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ を指定した値 $p = p_1, p_2$ とするには

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1p_2$$

$$\begin{cases} 5 - 2k_1 = -(p_1 + p_2) \\ 4(1 - k_1 - k_2) = p_1p_2 \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{5 + p_1 + p_2}{2}, \quad k_2 = -\frac{6 + 2p_1 + 2p_2 + p_1p_2}{4}$$

$$\textcircled{1} \quad p_1 = -4 + 4j, \quad p_2 = -4 - 4j$$

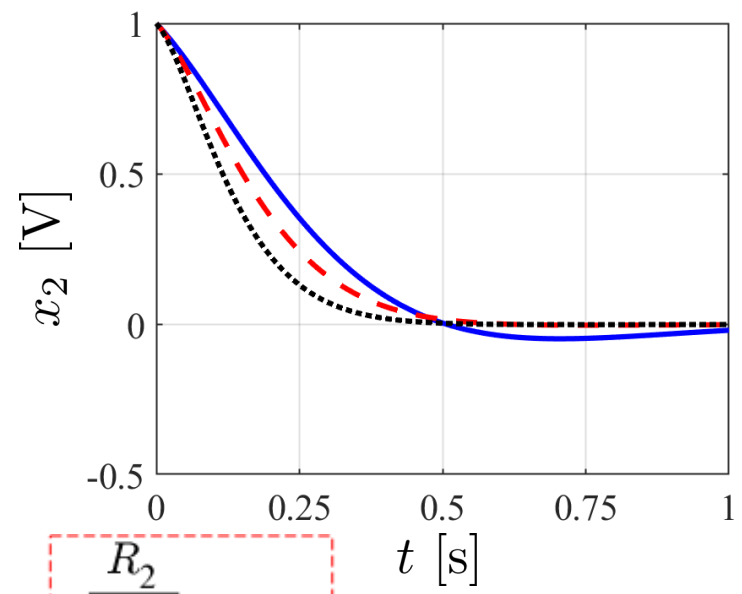
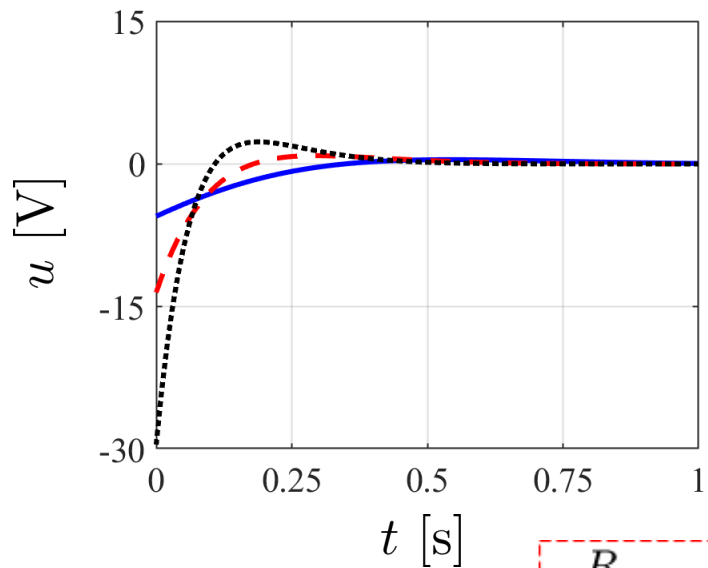
$$k_1 = -\frac{3}{2}, \quad k_2 = -\frac{11}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad p_1 = -8 + 4j, \quad p_2 = -8 - 4j$$

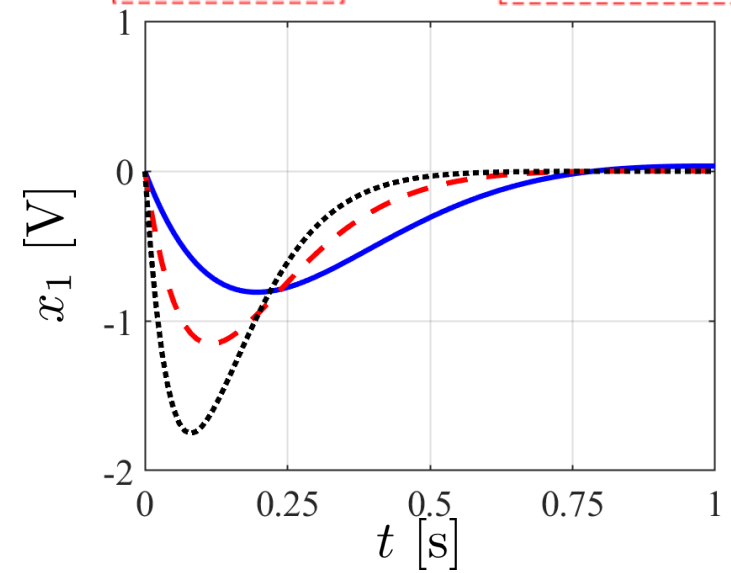
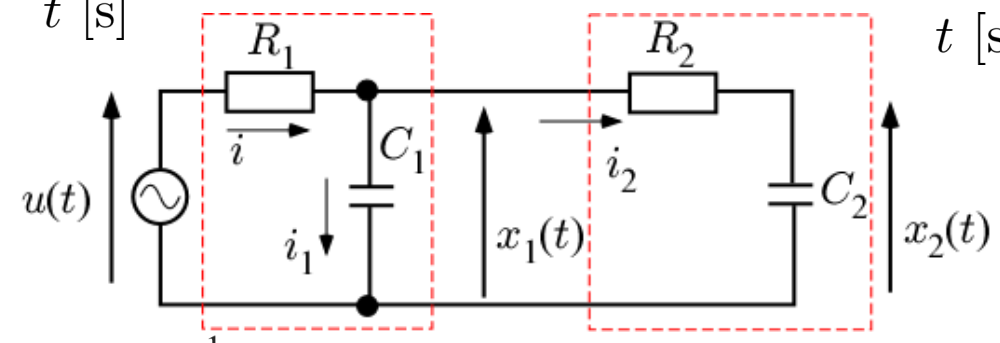
$$k_1 = -\frac{11}{2}, \quad k_2 = -\frac{27}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad p_1 = -12 + 4j, \quad p_2 = -12 - 4j$$

$$k_1 = -\frac{19}{2}, \quad k_2 = -\frac{59}{2}$$



- ① ———
- ② - - -
- ③ ·····



$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

可制御の確認

$$V_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|V_C| = 0 \quad \text{不可制御}$$

$A_{cl} := A + BK$ の特性方程式

$$|\lambda I - A_{cl}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 - 2k_1 & -2k_2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2 - 2k_1)(\lambda + 2) = 0$$

A_{cl} の固有値 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ を指定した値 $p = p_1, p_2$ とするには

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 + 2k_1, \quad \underline{\lambda_2 = -2}$$

コントローラにより指定することができない

1入力システムに対するアッカーマンの極配置アルゴリズム

可制御性行列を利用

[ステップ1]

与えられた p_1, \dots, p_n に対し, 多項式

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \cdots (\lambda - p_n) \\ &= \lambda^n + \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \delta_1\lambda + \delta_0\end{aligned}$$

の係数 $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$ を求め, 次式を計算

$$\Delta_A = A^n + \delta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \delta_1A + \delta_0I$$

[ステップ2]

コントローラのゲイン k を次式で与える

$$k = -eV_c^{-1}\Delta_A$$

$$e = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$V_c = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b]$$

[例4.3] (アッカーマン)

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

[ステップ1]

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \\ &= \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_A &= A^2 - (p_1 + p_2)A + p_1p_2 \cdot I \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^2 - (p_1 + p_2) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + p_1p_2 \cdot I \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} - (p_1 + p_2) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + p_1p_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[ステップ2]

$$V_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$V_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

よって

$$k = -eV_c^{-1}\Delta_A$$
$$= - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2 \end{bmatrix}$$
$$= - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2 \end{bmatrix}$$
$$= - \begin{bmatrix} \frac{-10 - 2(p_1 + p_2)}{4} & \frac{6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2}{4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{5 + p_1 + p_2}{2} & -\frac{6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2}{4} \end{bmatrix}$$

可制御標準形に基づく1入力システムの極配置

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad \cdots \quad c_n]$$



可制御標準形

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

可制御標準形への変換手順

[ステップ1]

A の特性多項式の係数を求める。

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

[ステップ2]

可制御性行列 V_c および M_c を求める。

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

[ステップ3]

$$T_c = (V_c M_c)^{-1} = M_c^{-1} V_c^{-1}$$

[ステップ4]

$$x_c(t) = T_c x(t)$$

$$A_c(t) = T_c A T_c^{-1}, \quad B_c(t) = T_c B, \quad C_c(t) = C T_c^{-1}$$

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

[例4.4]

$$(1) A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[ステップ1]

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{+ 5\lambda}_{\alpha_1} \underbrace{+ 4}_{\alpha_0}$$

[ステップ2]

$$V_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[ステップ3]

$$T_c = (V_c M_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

[ステップ4]

$$x_c(t) = T_c x(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x_2(t) \\ \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A_c(t) = T_c A T_c^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_c(t) = T_c B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c(t) = C T_c^{-1} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = [4 \quad 0]$$

可制御標準形に基づく1入力システムの極配置アルゴリズム

[ステップ1]

与えられた p_1, \dots, p_n に対し, 多項式

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \cdots (\lambda - p_n) \\ &= \lambda^n + \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \delta_1\lambda + \delta_0\end{aligned}$$

の係数 $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$ を求める。

[ステップ2]

コントローラのゲイン k を次式で与える

$$k = k_c T_c$$

$$k_c = [\alpha_0 - \delta_0 \quad \alpha_1 - \delta_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} - \delta_{n-1}]$$

[例4.5]

$$u(t) = k_c x_c(t) = [k_{c1} \quad k_{c2}]$$

$$p_1 = -8 + 4j, \quad p_2 = -8 - 4j$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = [4 \quad 0]$$

$$\begin{aligned} |\lambda I - (A_c + B_c k_c)| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 - k_{c1} & \lambda + 5 - k_{c2} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \underbrace{(5 - k_{c2})}_{\alpha_1} \lambda + \underbrace{4 - k_{c1}}_{\alpha_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \\ &= (\lambda - (-8 + 4j))(\lambda - (-8 - 4j)) \\ &= \lambda^2 + \underbrace{16}_{\delta_1} \lambda + \underbrace{80}_{\delta_0} \end{aligned}$$

係数を比較

$$\boxed{4} - k_{c1} = \boxed{80} \Rightarrow k_{c1} = -76 \quad k_{c1} = \alpha_0 - \delta_0$$

α_0 δ_0

$$\boxed{5} - k_{c2} = \boxed{16} \Rightarrow k_{c2} = -11 \quad k_{c2} = \alpha_1 - \delta_1$$

α_1 δ_1

$$\begin{aligned} u(t) &= k_c x_c(t) = \boxed{k_c T_c} x(t) \\ &= [-76 \quad -11] \overset{k}{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \left[-\frac{11}{2} \quad -\frac{27}{2} \right] \end{aligned}$$

[MATLAB演習]

4.4.2(a) 極配置

4.4.3(c) アッカーマンの極配置

4.4.3 状態フィードバック制御のシミュレーション

第4章 状態フィードバックによる制御

4.3 極配置によるコントローラ設計

キーワード：極配置

学習目標：状態フィードバックによりレギュレータ制御を理解する。極配置法について理解する。