

第7章 リアプノフの安定性理論

- 7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理
- 7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と漸近安定性

キーワード：リアプノフの安定定理

学習目標：リアプノフの安定定理を習得する。

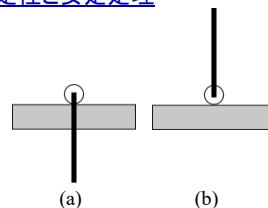
1

7 リアプノフの安定性理論

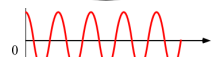
7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

平衡点

- (a) 振子が真下で静止した状態
- (b) 振子が真上で静止した状態

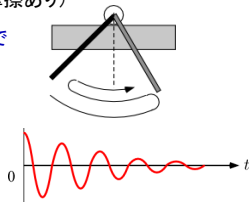


- (i) 振子が真下で静止した状態(粘性摩擦なし)
平衡点の近傍で振動を継続する
(リアプノフの意味で)安定



- (ii) 振子が真下で静止した状態(粘性摩擦あり)

振子の揺れが減衰していき、真下で静止する
漸近安定



- (iii) 振子が真上で静止した状態

少しでも平衡状態から離れると、真上で静止した状態には留まることができない
不安定

3

一般的な非線形な零入力システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (7.1)$$

リアプノフの意味での安定性

(7.1)式の平衡点を $x_e = 0$ とする。

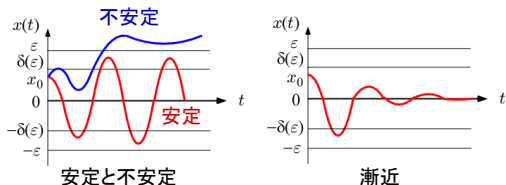
- (i) 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) > 0$ が存在し、 $\|x_0\| < \delta(\epsilon)$ のとき、任意の時刻 t で $\|x(t)\| < \epsilon$ であれば、平衡点は $x_e = 0$ は安定であるという。つまり、このことは、 $x_e = 0$ 近傍の任意の $x(0) = x_0$ に対して、任意の時刻 t で $x(t)$ が $x_e = 0$ 近傍に留まり続けることを意味する。
- (ii) 平衡点 $x_e = 0$ が安定であり、しかも、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

であるとき、平衡点 $x_e = 0$ は漸近安定であるという。つまり、このことは、 $x_e = 0$ 近傍の任意の $x(0) = x_0$ に対して、 $t \rightarrow \infty$ で $x(t) \rightarrow 0$ となることを意味する。

4

- (iii) 平衡点 $x_e = 0$ が安定でないとき、平衡点 $x_e = 0$ は不安定であるという



5

[例7.1]

$$J\ddot{\theta}(t) = -\mu\dot{\theta}(t) - Mgl \sin \theta(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \text{ とおく}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{Mgl}{J} \sin x_1(t) - \frac{\mu}{J} x_2(t) \end{bmatrix}$$

平衡点

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2e} \\ -\frac{Mgl}{J} \sin x_{1e} - \frac{\mu}{J} x_{2e} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ \sin x_{1e} = 0 \end{cases}$$

力学的エネルギー

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2} J x_2(t)^2 + Mgl(1 - \cos x_1(t))$$

運動エネルギー 位置エネルギー

6

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}Jx_2(t)^2 + Mgl(1 - \cos x_1(t))$$

$$|x_1(t)| < \pi \text{ の領域}$$

$$x(t) = 0 \text{ のときに限り } \phi(x(t)) = 0$$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}J \cdot 0 + Mgl(1 - \cos 0) = 0$$
 それ以外の $x(t)$ に対して $\phi(x(t)) > 0$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}Jx_2(t)^2 + Mgl(1 - \cos x_1(t)) > 0 \quad \text{正定関数}$$
 力学的エネルギーの時間微分 $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$\dot{\phi}(x(t)) = Jx_2(t)\dot{x}_2(t) + Mgl\dot{x}_1(t)\sin x_1(t)$$

$$= (J\dot{x}_2(t) + Mgl\sin x_1(t))x_2(t)$$

$$= -\mu x_2(t)^2 \quad \left[\frac{d}{dx} \cos x_1(t) \right]$$
 正定関数 $\phi(x(t))$ が単調非増加

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}Jx_2(t)^2 + Mgl(1 - \cos x_1(t)) > 0$$

リアプノフの安定定理
 非線形な零入力システム $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$ に対して、
 原点 $x(t) = 0$ を含む領域 U および

$$\phi(x(t)) > 0 \quad (\forall x(t) \in U, x(t) \neq 0)$$
 という**正定関数**を考える。このとき、以下のことがいえる。

(a) $\dot{\phi}(x(t))$ が半負定(準負定)関数

$$\dot{\phi}(x(t)) \leq 0 \quad (\forall x(t) \in U, x(t) \neq 0)$$
 であれば、平衡点 $x_e = 0$ は**安定**である。

(b) $\dot{\phi}(x(t))$ が負定関数

$$\dot{\phi}(x(t)) < 0 \quad (\forall x(t) \in U, x(t) \neq 0)$$
 であれば、平衡点 $x_e = 0$ は**漸近安定**である。

7 リアプノフの安定性理論
7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と漸近安定性

システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.3)$$
正定対称行列 $P = P^T > 0$ を用いて、2次形式の正定関数

$$\phi(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0 \quad (\forall x(t) \neq 0), \quad P = P^T > 0 \quad (7.12)$$
時間微分

$$\dot{\phi}(x(t)) = x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t)$$

$$= x(t)^T P A x(t) + (A x(t))^T P x(t)$$

$$= x(t)^T P A x(t) + x(t)^T A^T P x(t) \quad \left[(A x(t))^T = x(t)^T A^T \right]$$

$$= x(t)^T (P A + A^T P) x(t)$$

リアプノフ不等式 $PA + A^T P < 0$
 を満足する解 $P = P^T > 0$ が存在すれば、任意の $x(t) \neq 0$ に対して $\dot{\phi}(x(t)) < 0$ であり、(7.12)式の $\phi(x(t))$ はリアプノフ関数となり、線形な零入力システム (7.3) 式の平衡点 $x_e = 0$ は**漸近安定**である。

線形システムに対するリアプノフの安定定理(その1)
 線形な零入力システム(7.3)式を考える。任意の与えられた $Q = Q^T > 0$ に対し
リアプノフ方程式 $PA + A^T P = -Q (< 0)$
 を満足する解 $P = P^T > 0$ が唯一存在すること、線形な零入力システム (7.3) 式が**漸近安定**(A が安定行列)であることは等価である。

[例7.2]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
(解法1)
 A の固有値 $-1 \pm 2j$
(解法2)

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$
 とおく。リアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} \\ -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} & -10p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$P = P^T$ の正定を判断

(a) 固有値による判別方法

$$|\lambda I - P| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right|$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって } P = P^T > 0$$

(b) シルベスターの判別方法

$P = P^T$ の主座行列式

$$p_{11} = \frac{1}{2} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{2} > 0$$

よって $P = P^T > 0$

13

線形システムに対するリアプノフの安定定理(その2)

線形な零入力システム(7.3)式を考える。与えられた半正定対称行列 $Q = Q_0^T Q_0 \geq 0$ が次式を満足し、 (Q_0, A) が可観測であると

$$\text{rank} V_0 = n, \quad V_0 = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_0 A \\ \vdots \\ Q_0 A^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n \times n} \quad (\text{列フルランク})$$

ただし、 $Q \in R^{k \times n}$, $k \leq n$ である。このとき

リアプノフ方程式 $PA + A^T P = -Q_0^T Q_0$ (≤ 0)

を満足する解 $P = P^T > 0$ が唯一存在することと、線形な零入力システム(7.3)式が漸近安定(A が安定行列)であることは等価である。

14

[例7.3]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$Q_0 = [0 \ 1]$ とすると

$$Q = Q_0^T Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad V_0 = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_0 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} V_0 = 2$ より (Q_0, A) は可観測である。

リアプノフ方程式 $PA + A^T P = -Q_0^T Q_0$

を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} \\ -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} & -10p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ [例7.2]と同じ

15

$P = P^T$ の正定を判断

(a) 固有値による判別方法

$$|\lambda I - P| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{5}{20} \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{20} \right) \left(\lambda - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}, \frac{1}{4} \quad \text{よって } P = P^T > 0$$

(b) シルベスターの判別方法

$P = P^T$ の主座行列式

$$p_{11} = \frac{1}{20} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{80} > 0$$

よって $P = P^T > 0$

16

[MATLAB演習]

7.3.1 リアプノフ方程式

7.3.2 リアプノフ関数の挙動

17

第7章 リアプノフの安定性理論

7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と漸近安定性

キーワード：リアプノフの安定定理

学習目標：リアプノフの安定定理を習得する。

18

固有値 λ_1, λ_2 が正なら $x^T P x > 0$

$$\begin{aligned} x^T P x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \end{aligned}$$

19

対角行列の計算

$$\begin{aligned} x^T P x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}x_1 & P_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= P_{11}x_1^2 + P_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

ベクトルの計算

$$\begin{aligned} x^T x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

20