第 8 章　最適レギュレータ

8.1　最適レギュレータ(LQ最適制御)によるコントローラ設計

キーワード： 最適レギュレータ，最適制御

学習目標：最適レギュレータによるコントローラの設計法を習得する。

8 最適レギュレータ

8.1 最適レギュレータ(LQ最適制御)によるコントローラ設計

システム

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad x(0)=x_0\\ \eta(t)=x(t)\end{cases}$$

コントローラ

$$\mathcal{K}:u(t)=Kx(t)$$

極配置法による問題点

- 極の実部を負側に大きくするに従い，応答の収束の速さは向上するが，K も大きくなる。
- 多入力システムの場合，最もよい制御を実現する K を設計するための極をいくつにすればよいか不明である。

[例8.1]

システム $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

コントローラ $\mathcal{K} : u(t) = kx(t)$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_{cl} = A + Bk$ の固有値が $-1 \pm 2j$

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ としたときの状態 $x_1(t),\ x_2(t)$, 操作量 $u(t)$ と

それらの2乗積分

$$J_{x_1} = \int_0^\infty x_1(t)^2 dt \ > 0 \qquad J_{x_2} = \int_0^\infty x_2(t)^2 dt \ > 0$$

$$J_u = \int_0^\infty u(t)^2 dt \ > 0$$

- “状態 $x_1(t)$, $x_2(t)$ の 0 への収束の速さ”を J_{x_1}, J_{x_2} の大きさで評価する。(J_{x_1}, J_{x_2} が小さいほど状態 $x_1(t)$, $x_2(t)$ の収束性がよい)
- “操作量 $u(t)$ の大きさ”を J_u の大きさで評価する(J_u が小さいほど操作量 $u(t)$ が過大でない)

$$J_{x_1} = \int_0^\infty x_1(t)^2 dt = 0.45$$

$$J_{x_2} = \int_0^\infty x_2(t)^2 dt = 1.25$$

$$J_u = \int_0^\infty u(t)^2 dt = 17.5$$

⇒ $J_{x_1} + J_{x_2} + J_u \fallingdotseq J_u$

J_{x_1}, J_{x_2} の大きさが影響しない

⇓ 重みをつける

$$\begin{aligned} J &= q_1 J_{x_1} + q_2 J_{x_2} + r J_u \\ &= \int_0^\infty \left(q_1 x_1(t)^2 + q_2 x_2(t)^2 + r u(t)^2 \right) dt \end{aligned}$$

評価関数

$$J = \sum_{i=1}^{n} q_i J_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} r_j J_{u_j} = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i(t)^2 + \sum_{i=1}^{n} r_j u_j(t)^2 \right) dt$$

評価関数の重み $q_i \geq 0,\ r_j > 0$ の役割

- $q_i \geq 0$ を大きくすれば，“状態 $x_i(t)$ の 0 への収束の速さ（ J_{x_i} を小さくすること）”を重視することになる。
- $r_j > 0$ を大きくすれば，“操作量 $u_j(t)$ が過大でないこと（ J_{u_j} を小さくすること）”を重視することになる。

実際には，以下を繰り返す

- $q_i \geq 0,\ r_j > 0$ を調整してコントローラを設計
- 得られたコントローラを用いたシミュレーションのよる評価

最適レギュレータ問題（LQ最適制御問題）

n 次システムの可制御な制御対象

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad x(0)=x_0\\ \eta(t)=x(t)\end{cases}$$

を考える。与えられた

(i) $Q=Q^T>0$

(ii) (Q_0, A) が可観測かつ $Q=Q^T=Q_0^TQ_0\geq 0$

のいずれかを満足する重み行列 $Q=Q^T$および $R=R^T>0$ に対して，評価関数

$$J=\int_0^{\infty}\left(x(t)^TQx(t)+u(t)^TRu(t)\right)dt$$

を最小化する状態フィードバック形式のコントローラ $u(t)=Kx(t)$ を求める問題を最適レギュレータ問題とよぶ。

最適レギュレータ問題の可解条件

可制御な制御対象

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = x(t) \end{cases}$$

評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt$$

が与えられたとする。このとき，評価関数を最小化するコントローラ $u(t) = Kx(t)$ のゲイン $K = K_{opt}$ は唯一に定まり

$$K_{opt} := -R^{-1} B^T P_{opt}$$

により与えられる。ただし，$P = P_{opt}$ は

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

を満足する実数の正定対称解 $P = P^T > 0$ であり，唯一に定まる。また，評価関数の最小値は次式である。

$$J_{min} = x_0^T P_{opt} x_0$$

[例8.2]

システム $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(x(t)^T Q x(t) + r u(t)^2 \right) dt$$

(1) $Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0,\ r = 1 > 0$

(2) $Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0\ (q_1 > 0),\ r = 1 > 0$

リカッチ方程式の正定対称解を$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$とする

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{1} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -10p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -10p_{22} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10p_{12} & -10p_{22} \\ p_{11} - p_{12} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{1} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -20p_{12} & p_{11} - p_{12} - 10p_{22} \\ -10p_{22} + p_{11} - p_{21} & 2p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{22}p_{12} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -p_{12}^2 - 20p_{12} + 300 & -p_{12}p_{22} + p_{11} - p_{12} - 10p_{22} \\ -p_{12}p_{22} + p_{11} - p_{12} - 10p_{22} & -p_{22}^2 + 2p_{12} - 2p_{22} + 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
-p_{12}^2 - 20p_{12} + 300 = 0 & (1) \\
-p_{12}p_{22} + p_{11} - p_{12} - 10p_{22} = 0 & (2) \\
-p_{22}^2 + 2p_{12} - 2p_{22} + 60 = 0 & (3)
\end{cases}
$$

(1) 式より

$$-p_{12}^2 - 20p_{12} + 300 = 0$$

$$\Rightarrow \ (p_{12} - 30)(p_{12} + 10) = 0 \ \Rightarrow \ p_{12} = -30, \ 10$$

(i) $p_{12} = -30$ のとき

(3) 式より $-p_{22}^2 - 60 - 2p_{22} + 60 = 0$

$$\Rightarrow \ p_{22}^2 + 2p_{22} = 0 \ \Rightarrow \ p_{22} = 0, \ -2$$

(2) 式より

$p_{22} = 0$ のとき $p_{11} + 30 = 0 \ \Rightarrow \ p_{11} = -30$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -30 & -30 \\ -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$-30 < 0, \ \ |P_1| = -900$

正定でない

$p_{22} = -2$ のとき $-60 + p_{11} + 30 + 20 = 0 \ \Rightarrow \ p_{11} = 10$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 10 & -30 \\ -30 & -2 \end{bmatrix}$$

$10 < 0, \ \ |P_2| = -20 - 900 < 0$

正定でない

(i) $p_{12} = 10$ のとき

(3) 式より $-p_{22}^2 + 20 - 2p_{22} + 60 = 0$

$$\Rightarrow \ p_{22}^2 + 2p_{22} - 80 = 0$$

$$\Rightarrow \ (p_{22} + 10)(p_{22} - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \ p_{22} = 8, \quad -10$$

(2) 式より

$p_{22} = 8$ のとき $-80 + p_{11} - 10 - 80 = 0 \ \Rightarrow \ p_{11} = 170$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 170 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$170 > 0, \quad |P_3| = 1360 - 100 > 0$

正定

$p_{22} = -10$ のとき $100 + p_{11} - 10 + 100 = 0 \Rightarrow \ p_{11} = -190$

$$P_4 = \begin{bmatrix} -190 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

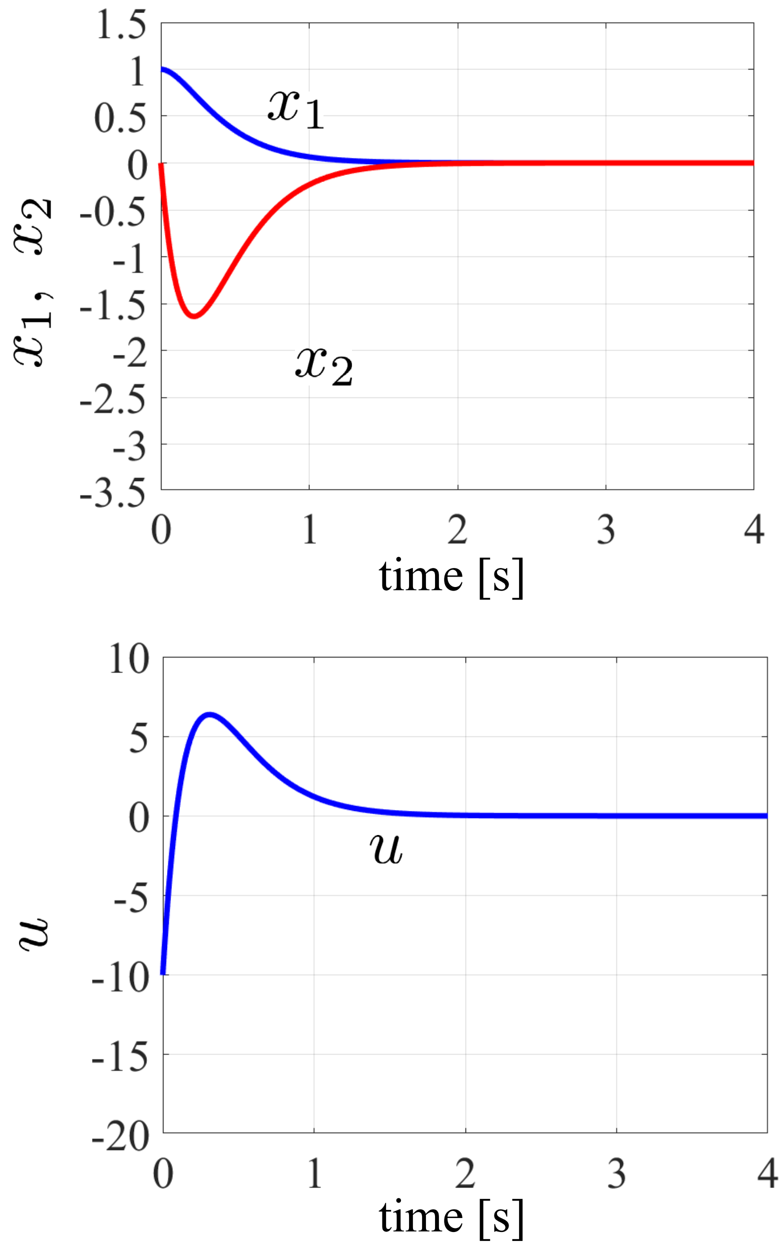
$-190 < 0, \quad |P_4| = 1900 - 100 > 0$

正定でない

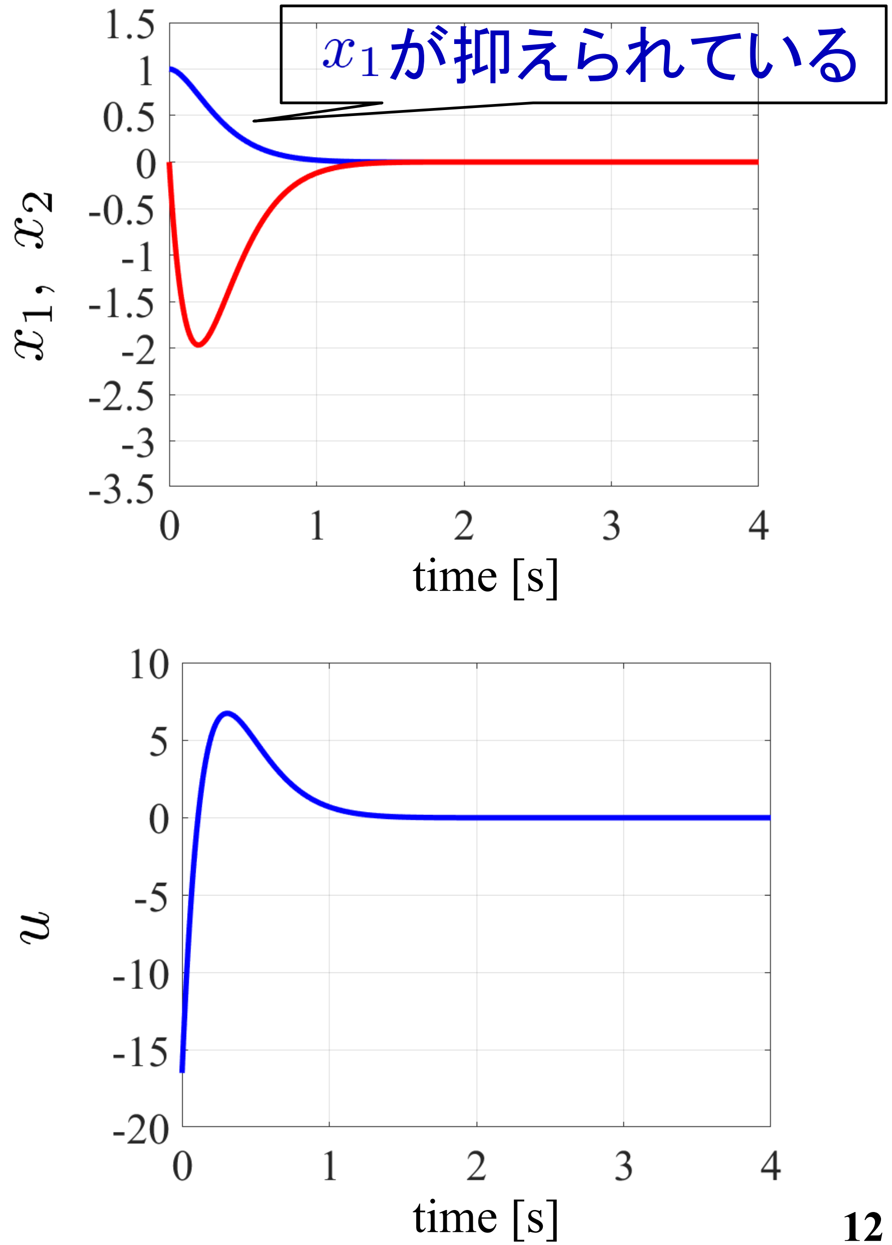
P_3 のみが正定

$$k = -R^{-1}B^TP = -\frac{1}{r}b^TP_3 = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 170 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -8 \end{bmatrix}$$

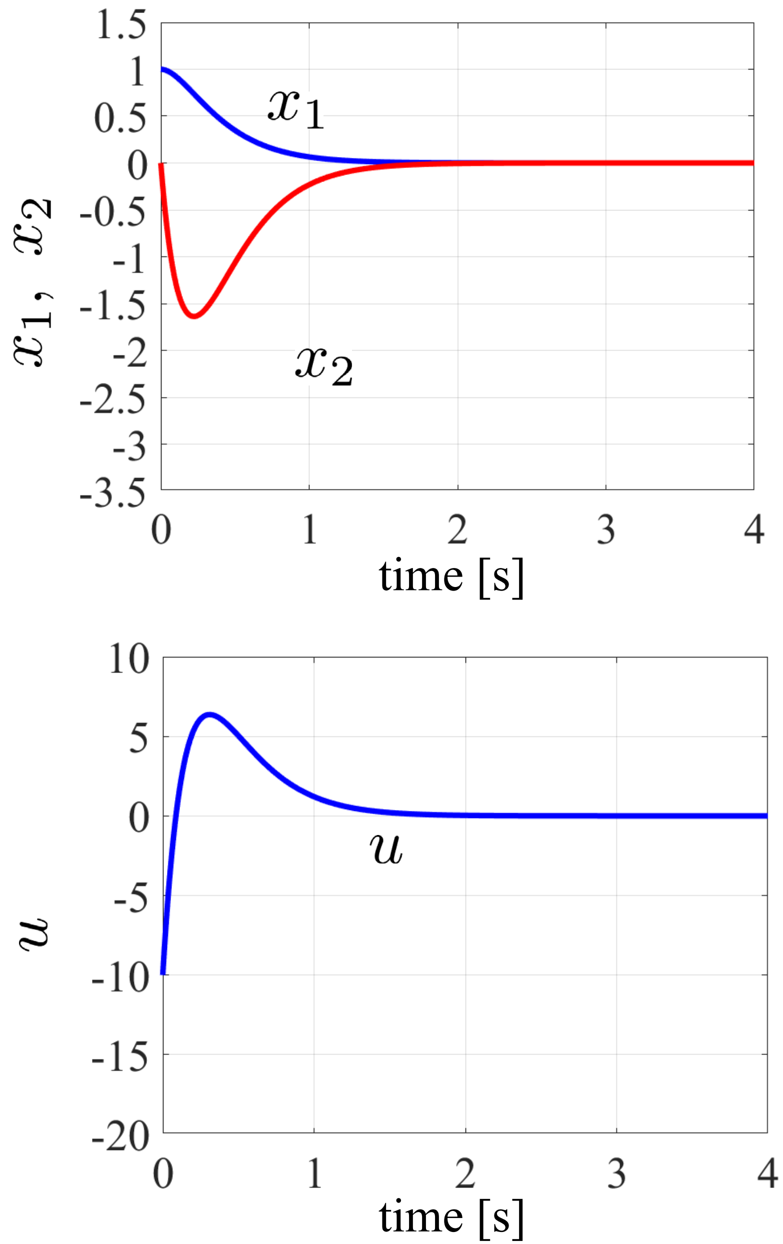
$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \ \ r = 1 > 0$$



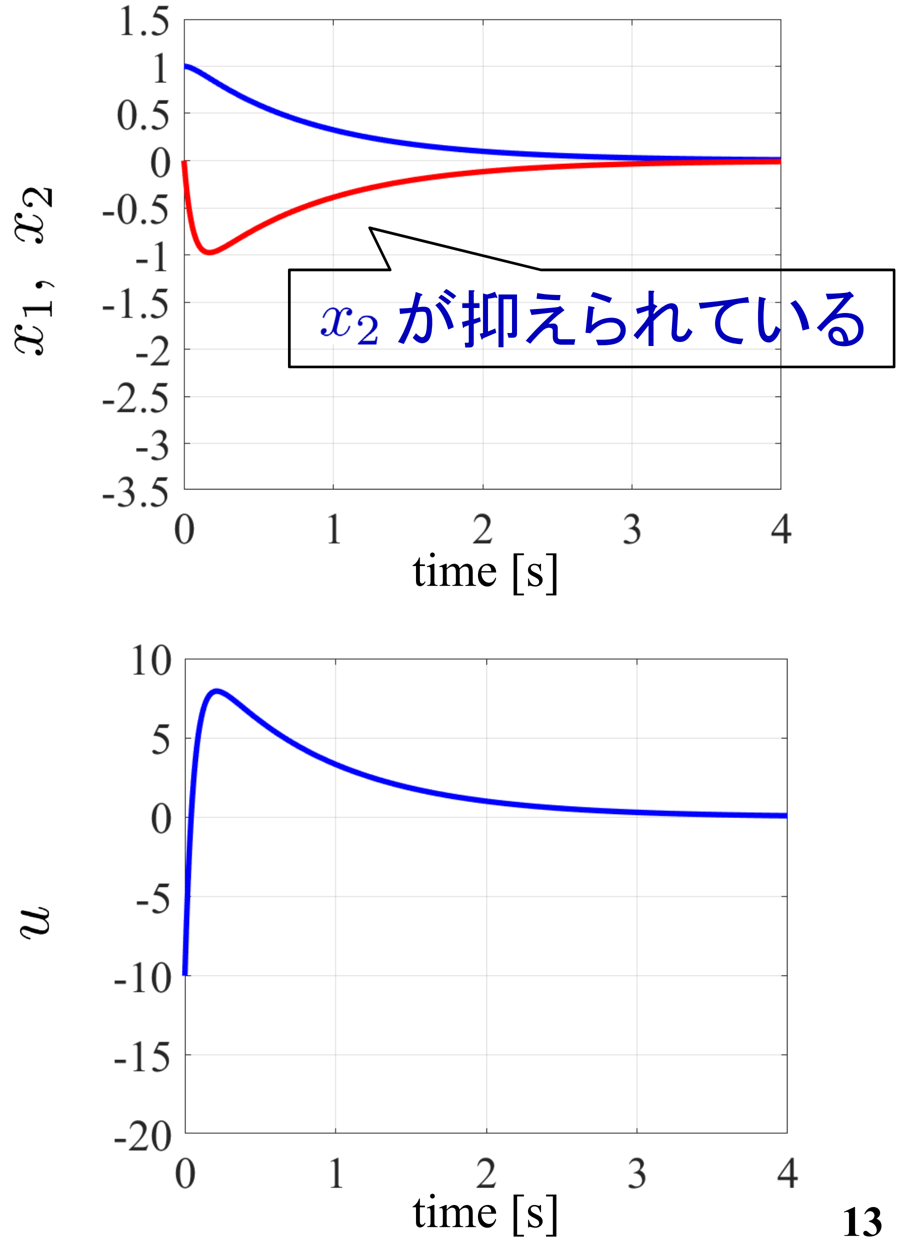
$$Q = \begin{bmatrix} 600 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \ \ r = 1 > 0$$



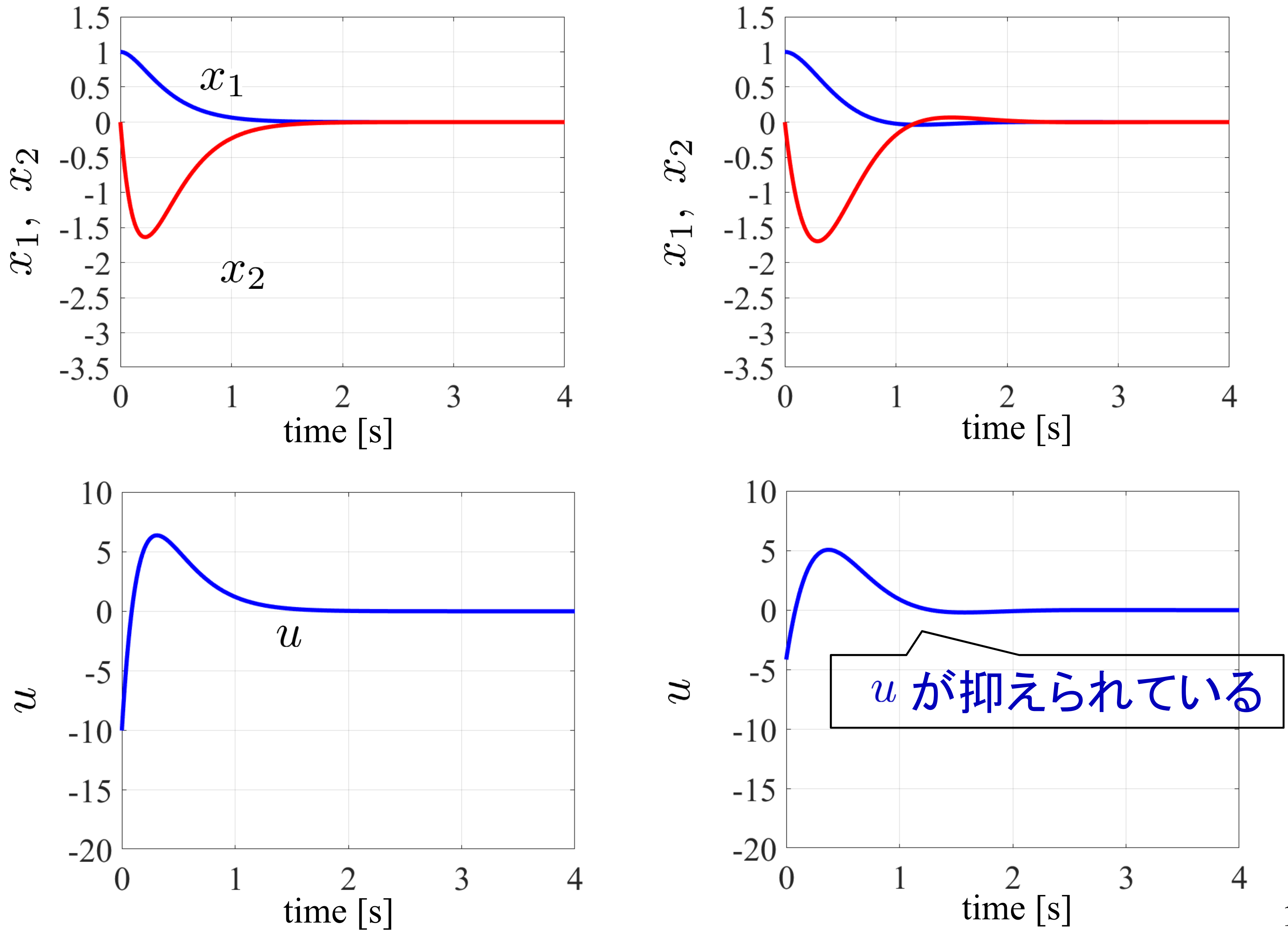
$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0,\ r = 1 > 0$$



$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 300 \end{bmatrix} > 0,\ r = 1 > 0$$



$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0,\ \ r = 1 > 0 \qquad Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0,\ \ r = 3 > 0$$



[MATLAB演習]

8.4.1 リカッチ方程式と最適レギュレータ

(8.4.2 リカッチ方程式の数値解法(有本-ポッターの方法))

第 8 章　最適レギュレータ

8.1　最適レギュレータ(LQ最適制御)によるコントローラ設計

キーワード：最適レギュレータ，最適制御

学習目標：最適レギュレータによるコントローラの設計法を習得する。