

## 第6章 オブザーバと出力フィードバック

- 6.1 問題設定
- 6.2 微分信号を利用した状態の復元
- 6.3 同一次元オブザーバによる状態推定
- 6.4 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

キーワード：オブザーバ

学習目標：状態が検出できないときに、観測量の時間微分を利用した状態推定を習得する。同一次元オブザーバを用いた状態推定と出力フィードバック制御を習得する。

1

## 6 オブザーバと出力フィードバック

### 6.1 問題設定 コントローラ

システム

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = x(t) \end{cases}$$

$\eta(t)$ : 観測量

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t)$$



$x(t)$  の一部しか検出できない

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases}$$

[例6.1]

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$\bar{C}$

2

## 6 オブザーバと出力フィードバック

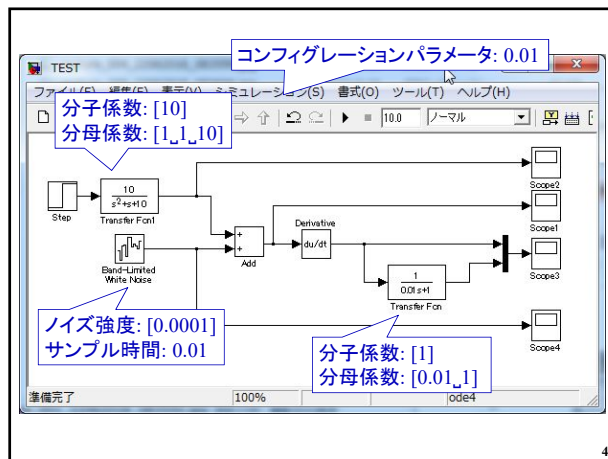
### 6.2 微分信号を利用した状態の復元

差分近似

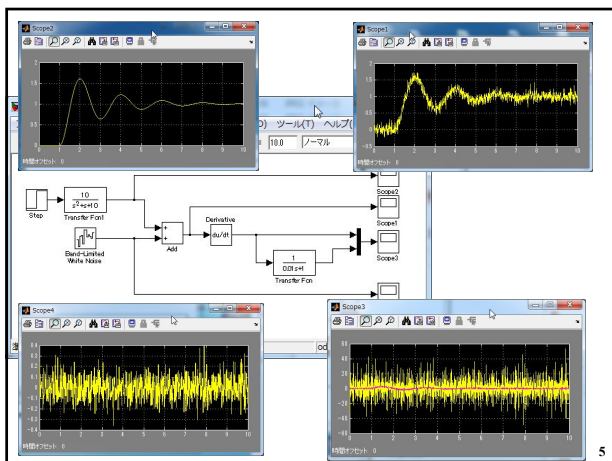
$$\omega_i(t) = \dot{\theta}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t) - \theta_i(t - \Delta t)}{t - (t - \Delta t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t) - \theta_i(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\omega_i[k] \approx \frac{\theta_i[k] - \theta_i[k-1]}{\Delta t}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

3



4



5

$$\eta(t) = \bar{C}x(t)$$

$$\dot{\eta}(t) = \bar{C}\dot{x}(t) = \bar{C}(Ax(t) + Bu(t)) = \bar{C}Ax(t) + \bar{C}Bu(t)$$

$$\ddot{\eta}(t) = \bar{C}A\dot{x}(t) + \bar{C}B\dot{u}(t) = \bar{C}A(Ax(t) + Bu(t)) + \bar{C}B\dot{u}(t) = \bar{C}A^2x(t) + \bar{C}ABu(t) + \bar{C}B\dot{u}(t)$$

$$\eta^{(n-1)}(t) = \bar{C}A^{n-1}x(t) + \bar{C}A^{n-2}Bu(t) + \dots + \bar{C}Bu^{(n-3)}(t) + \bar{C}Bu^{(n-2)}(t)$$

6

$$\begin{bmatrix} \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) \\ \ddot{\eta}(t) \\ \vdots \\ \eta^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \bar{C}A^2 \\ \vdots \\ \bar{C}A^{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{C}B & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{C}AB & \bar{C}B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}A^{n-2}B & \bar{C}A^{n-3}B & \cdots & \bar{C}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}$$

$\alpha(t) \in R^n$     $V_O \in R^{n \times n}$     $E \in R^{n \times p(n-1)}$     $\beta(t) \in R^{p(n-1)}$

$V_O x(t) = \alpha(t) - E\beta(t)$   
 $V_O^T V_O x(t) = V_O^T (\alpha(t) - E\beta(t))$   
 $\text{rank} V_O = n$  (列フルランク)  
 $x(t) = (V_O^T V_O)^{-1} V_O^T (\alpha(t) - E\beta(t))$

1出カシステムするとき

$x(t) = V_O^{-1} V_O^T V_O^T (\alpha(t) - E\beta(t)) = V_O^{-1} (\alpha(t) - E\beta(t))$

7

[例6.2]

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \eta(t) = \bar{c}x(t) \end{cases}, \quad \bar{c} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$V_O = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}A \\ \bar{c}A^2 \\ \bar{c}A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$|V_O| = 4 \neq 0$

8

$x(t) = (V_O^T V_O)^{-1} V_O^T (\alpha(t) - E\beta(t))$

$$V_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_O^T V_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$V_O^T V_O$  は正方行列となるので、逆行列を取ることができる。

9

[ MATLAB演習 ]

6.5.1 可観測性

10

6 オブザーバと出力フィードバック

6.3 同一次元オブザーバによる状態推定

観測量  $\eta(t)$  の微分は、ノイズが大きい。そこで、入出力信号から状態  $x(t)$  を推定する

システム

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases}$$

$\hat{x}(t)$ :  $x(t)$  の推定値

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$$

推定誤差  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (Ax(t) + Bu(t)) - (A\hat{x}(t) + Bu(t)) = A\varepsilon(t)$$

初期状態  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$

$$\varepsilon(t) = e^{At} \varepsilon_0$$

11

$\varepsilon(t) = e^{At} \varepsilon_0$

$A$  が安定行列でない場合、推定誤差が発散する。  
収束の速さが  $A$  の固有値に依存する。

同一次元オブザーバ

制御対象の入力  $u(t)$  だけでなく、出力信号  $\eta(t)$  も利用し、出力信号  $\eta(t)$  とその推定値  $\hat{\eta}(t) = \bar{C}\hat{x}(t)$  との差を利用して推定誤差  $\varepsilon(t)$  を補正したもの

12

$$\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \hat{\eta}(t))$$

$$= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t))$$

$$\varepsilon(t) = \dot{x}(t) - \hat{\dot{x}}(t)$$

$$= (Ax(t) + Bu(t)) - \{A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t))\}$$

$$= (A + L\bar{C})\varepsilon(t)$$

**オブザーバゲイン  $L$  を選べば**  

$$\varepsilon(t) = e^{(A+L\bar{C})t}\varepsilon(0) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) \rightarrow x(t)$$

**可検出:  $L$  が存在すること**  

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$$

**可観測性の定義**

線形システム(6.3)式に対し, 有限の時間  $t = t_f$  までの入出力データ  $u(t), \eta(t)$  ( $0 \leq t \leq t_f$ ) を観測することによって, 初期状態  $x_0$  を一意に決定できるとき, “システムが可観測である”という。また, システムが可観測でないとき, “システムが不可観測である”という。

**可観測性の判別**

可観測性行列  $V_o = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \vdots \\ \bar{C}A^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$

可観測性グラミアン  $W_o := \int_0^{t_f} e^{A^T \tau} \bar{C}^T \bar{C} e^{A\tau} d\tau \in R^{n \times n}$

(a) 可観測性行列  $V_o$  が次式を満足する  

$$\text{rank} V_o = n$$

(b) 可観測性グラミアン  $W_o(t_f)$  が正則である。

[例6.3]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

(1) 角度センサによりアームの角度  $x_1(t) = \theta(t)$  のみが検出される。

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \eta(t) = \bar{c}x(t) \end{cases}, \quad \bar{c} = [1 \quad 0]$$

$$V_o = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |V_o| = 1 \neq 0$$

(2) 角速度センサによりアームの角度  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  のみが検出される。

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \eta(t) = \bar{c}x(t) \end{cases}, \quad \bar{c} = [0 \quad 1]$$

$$V_o = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{g}{l} \end{bmatrix}, \quad |V_o| = 0$$

**オブザーバゲインの設計**

制御対象(6.3)式が可観測であるとき,  $A + L\bar{C}$  の固有値を任意の指定した値に配置できる

**双対システム**

$$\mathcal{P}_d: \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u_d(t) \\ y_d(t) = C_d x_d(t) \end{cases}$$

$$A_d := A^T \in R^{n \times n}$$

$$B_d := \bar{C}^T \in R^{n \times r}$$

$$C_d := \bar{B}^T \in R^{p \times n}$$

$V_{cd} := [B_d \quad A_d B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1} B_d]$  **可制御性行列と同じ**

$$= [\bar{C}^T \quad A^T \bar{C}^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^T \bar{C}^T]$$

$$= [\bar{C}^T \quad (\bar{C}A)^T \quad \dots \quad (\bar{C}A^{n-1})^T]$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \vdots \\ \bar{C}A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= V_o^T$$

$\text{rank} V_{cd} = n$  を満足すれば, 可観測である

コントローラ  

$$K_d: u_d = K_d x_d(t), \quad K_d := L^T$$
 により,  

$$A_d + B_d K_d = A^T + \bar{C}^T L^T = (A + L\bar{C})^T$$
 の固有値を, 任意の指定した値に配置可能

$\text{rank} V_{cd}^T = \text{rank} V_o = n$

**可観測性と極配置の実現可能性**

(i) 線形システム(6.3)式が可観測である。

(ii)  $L$  を適当に選ぶことにより,  $A + L\bar{C}$  の固有値を, 任意の値に設定可能(極配置が可能)である。

[例 6.4]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) - l(\eta(t) - \bar{c}\hat{x}(t))$$

$$\varepsilon(t) = (A + l\bar{c})\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$(A + l\bar{c}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - (A + l\bar{c})| = \lambda^2 + (10 - l_1)\lambda - 10l_1 - l_2 = 0$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1p_2$$

$$\begin{cases} 10 - l_1 = -(p_1 + p_2) \\ -10l_1 - l_2 = p_1p_2 \end{cases}$$

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + p_1 + p_2 \\ -10(10 + p_1 + p_2) - p_1p_2 \end{bmatrix}$$

19

6 オブザーバと出力フィードバック

6.4 同次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

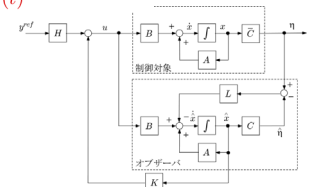
バック制御

システム

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases}$$

出力フィードバック形式のコントローラ

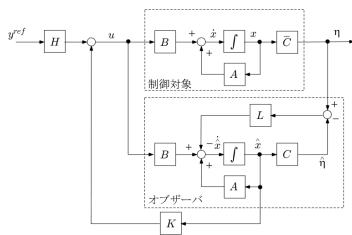
$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t)) \\ u(t) = K\hat{x}(t) + Hy^{ref}(t) \end{cases}$$



20

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B(K\hat{x}(t) + Hy^{ref}(t)) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t)) \\ &= \underbrace{(A + BK + L\bar{C})}_{A_k} \hat{x}(t) - \underbrace{L\eta(t)}_{B_k} + BH y^{ref}(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_k \hat{x}(t) + B_k \eta(t) + BH y^{ref}(t) \\ u(t) = C_k \hat{x}(t) + Hy^{ref}(t) \end{cases}$$

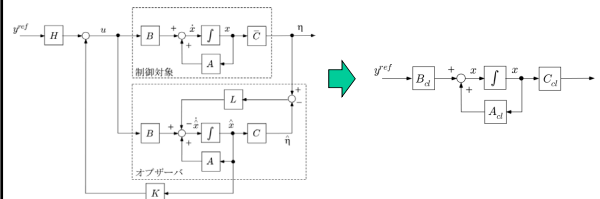


21

PとKからなるシステム

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ax(t) + B(C_k \hat{x}(t) + Hy^{ref}(t)) \\ A_k \hat{x}(t) + B_k Cx(t) + BH y^{ref}(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_k \\ B_k \bar{C} & A_k \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} BH \\ BH \end{bmatrix}}_{B_{cl}} y^{ref}(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{cl}(t) = A_{cl}x_{cl}(t) + B_{cl}y^{ref}(t)$$



22

$$\dot{\xi}_{cl}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{T_{cl}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{cl}(t) &= T_{cl} \dot{x}_{cl}(t) = T_{cl} A_{cl} x_{cl}(t) + T_{cl} B_{cl} y^{ref}(t) \\ &= \underbrace{T_{cl} A_{cl} T_{cl}^{-1}}_{\bar{A}_{cl}} \xi_{cl}(t) + \underbrace{T_{cl} B_{cl}}_{\bar{B}_{cl}} y^{ref}(t) \\ &= \bar{A}_{cl} \xi_{cl}(t) + \bar{B}_{cl} y^{ref}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ -L\bar{C}A & A + BK + L\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + L\bar{C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{B}_{cl} = \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix}$$

23

$$\begin{aligned} |\lambda I - \bar{A}_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda I - (A + BK) & BK \\ 0 & \lambda I - (A + L\bar{C}) \end{vmatrix} \\ &= |\lambda I - (A + BK)| |\lambda I - (A + L\bar{C})| = 0 \end{aligned}$$

状態フィードバックの極 オブザーバを用いたときの極

分離定理

状態フィードバックゲイン K とオブザーバゲイン L を独立に設計できる

24

[例 6.5]

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) \\ \eta(t) = \bar{c}x(t) \end{cases}, \quad c = \bar{c} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$A + bk$  の固有値が  $-2 \pm 2j$ ,  $-2 \pm j$  となる状態フィードバックゲイン  $k$  を設計

$A + l\bar{c}$  の固有値が  $-4 \pm 4j$ ,  $-4 \pm 2j$  となるオブザーバゲイン  $l$  を設計

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) - l(\eta(t) - \bar{c}\hat{x}(t)) \\ u(t) = k\hat{x}(t) + h y^{ref}(t) \end{cases}$$

$$h = [-k \quad 1] \begin{bmatrix} A & b \\ c & 0 \end{bmatrix}^{-1} [0 \quad 1]$$

25

$$k = \left[-\frac{7}{2} \quad -\frac{5}{2} \quad -\frac{13}{2} \quad -\frac{11}{2}\right], \quad h = 10$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda + 4 - 4j)(\lambda + 4 + 4j)(\lambda + 4 - 2j)(\lambda + 4 + 2j) \\ &= \lambda^4 + 16\lambda^3 + 116\lambda^2 + 416\lambda + 640 \end{aligned}$$

$$\delta_3 = 16, \quad \delta_2 = 116, \quad \delta_1 = 416, \quad \delta_0 = 640$$

$$\Delta A = A^4 + \delta_3 A^3 + \delta_2 A^2 + \delta_1 A + \delta_0 I$$

$$= \begin{bmatrix} 356 & 222 & 284 & 194 \\ -500 & 106 & 500 & 534 \\ 142 & 97 & 498 & 319 \\ 250 & 267 & -250 & 373 \end{bmatrix}$$

26

[MATLAB演習]

6.5.2 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

27

第6章 オブザーバと出力フィードバック

- 6.1 問題設定
- 6.2 微分信号を利用した状態の復元
- 6.3 同一次元オブザーバによる状態推定
- 6.4 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

キーワード：オブザーバ

学習目標：状態が検出できないときに、観測量の時間微分を利用した状態推定を習得する。同一次元オブザーバを用いた状態推定と出力フィードバック制御を習得する。

28