

2023 年度 計測制御工学 制御系演習課題

倒立振り子システムは、台車と棒から構成され、台車のモータに加える電流を制御することによって棒の位置を制御し、棒を垂直で安定に維持させるシステムである。本来、このシステムは不安定なシステムであるので、モータに加える電流を制御して安定化する。倒立振り子システムのモデルを図1に示す。図1を用いて倒立振り子システムの数学的モデルを $\alpha(t) = 0$ で線形化すると、

$$\sin \alpha(t) \approx \alpha(t), \quad \cos \alpha(t) \approx 1, \quad (\dot{\alpha}(t))^2 \approx 0, \quad \alpha(t)^2 \approx 0 \quad (1)$$

となり、倒立振り子システムの線形化モデルは以下のように記述することができる。

$$M_1 \ddot{x}_c(t) = -(I_p + M_p l_p^2)(B_{eq} + F_{c1})\dot{x}_c(t) - M_p l_p B_p \dot{\alpha}(t) + (I_p + M_p l_p^2)F_{c2}V_m(t) + M_p^2 l_p^2 g \alpha(t) \quad (2)$$

$$M_1 \ddot{\alpha}(t) = (M_c + M_p)M_p g l_p \alpha(t) - (M_c + M_p)B_p \dot{\alpha}(t) - M_p l_p (B_{eq} + F_{c1})\dot{x}_c(t) + M_p l_p F_{c2}V_m(t) \quad (3)$$

以下の問いに答えよ。

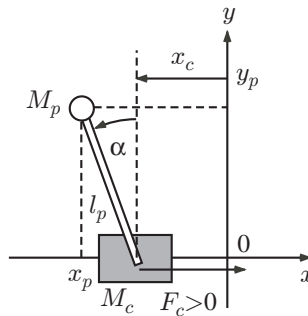


図 1: 倒立振り子システム

[問題 1] (2)-(3) 式から、状態ベクトルを下記にしたとき、倒立振り子システムの状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BV_m(t) \quad (1-1)$$

の A と B を数式で求めよ。

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

[問題 2]

状態がすべてが観測できる

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

のとき、

$$y(t) = Cx(t) + DV_m(t) \quad (2-2)$$

の C と D を数式で求めよ。

[問題 3] 倒立振り子システムのパラメータが表 1 で与えられているとき、「制御系演習課題 1」の問題 1, 問題 2 で答えた A, B, C, D を MATLAB を用いて数値で答えよ。これが異なると、問題 4 以降がすべて失敗するため、必ずチェックをうけること。

表 1: 倒立振り子システムのパラメータ

記号	値	記号	値
M_p	1.27×10^{-1}	l_p	1.7780×10^{-1}
I_p	1.1987×10^{-3}	B_p	2.40×10^{-3}
B_{eq}	5.4	g	9.81
M_c	1.0731	M_1	5.7471×10^{-3}
F_{c1}	7.7443	F_{c2}	1.7265

[問題 4] 問題 3 で答えた A, B, C, D を用いて可制御性かどうかを判別せよ。m-file と結果を示すこと。

[問題 5] 倒立振り子システムに対して、以下の性能仕様を満足する LQR を設計し、以下を提出せよ。

- (1) 設計した Q, R の値を示せ。
- (2) 状態フィードバック $u(t) = K(t)$ のゲイン K の値を示せ。
- (3) 波形 x_c, α, V_m を示せ。
- (4) 設計に用いた m-file を示せ。

[性能仕様]

- (1) 直立位置からのずれが 1 [deg] 以内とする。
- (2) 台車の位置応答に関する立ち上がり時間を 1.5 [s] 以内とする。ここで、立ち上がり時間とは、図 2 の T_r を表し、応答が定常値の 10% から 90% になるまでに要する時間である。
- (3) 制御入力 V_m が飽和しない。 $-13 \leq V_m \leq 13$

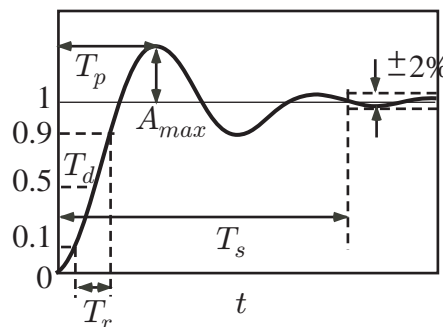


図 2: 立ち上がり時間

[問題 5 の手順]

- (1) q_1, q_2, q_3, q_4, r_1 の値を決定してプログラムを実行する (program3 を参照)。ここで、diag とは、対角行列の要素を記述するための記号である。
- (2) command 3 のように E を実行することにより、 $(A - BK)$ の極が負であるか確認する。
- (3) 図 3 の simulink ファイル model2.mdl を開いてシミュレーションをする。波形を観測して、図 4-6 のように制御仕様を満足するか確認する。
 (Check1) x_c [mm] の波形には、黄色と紫色の線があり、黄色は目標値、紫色は台車の位置を表している。黄色のステップ状の変化に対して紫色の立ち上がり時間が 1.5 [s] 以内であればよい。
 (Check2) α [deg] の波形は、 $-1 \leq \alpha < 1$ であればよい。
 (Check3) V_m [V] の波形は、 $-13 \leq V_m \leq 13$ であればよい。
- (4) 制御仕様を満足していれば設計終了、していなければ設計をやり直す。
- (5) 図を保存する。MATLAB window で data_plot2 と入力して実行する。png 形式のファイル cartposition2.png, pendangle2.png, control2.png ができる。

program 3

```
IC_ALPHA0 = 0
Q = diag( [ q1 q2 q3 q4 ] );
R = r1
[ K, S, E ] = lqr( A, B, Q, R );
```

command 3

```
>> experiment_file
>> E
(極が負であるか確認する。)
(シミュレーション後に)
>> data_plot2;
```

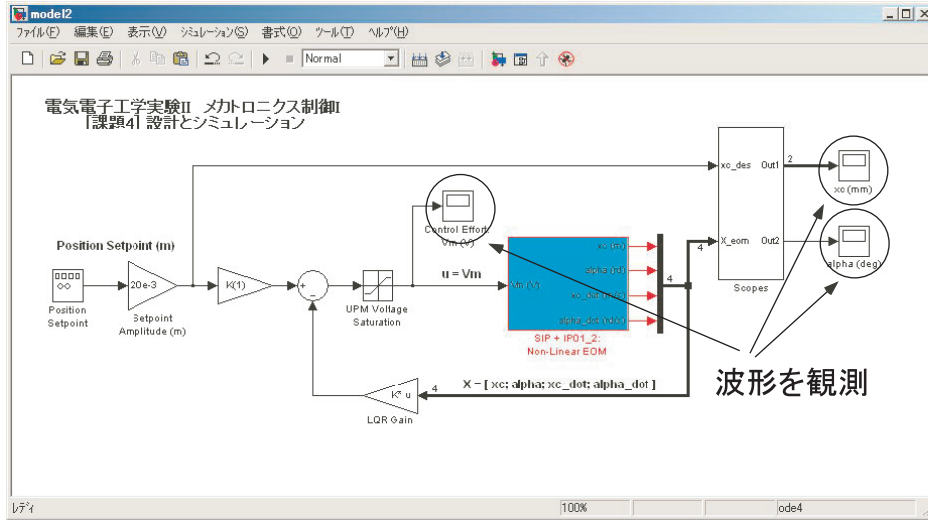


図 3: model2.mdl

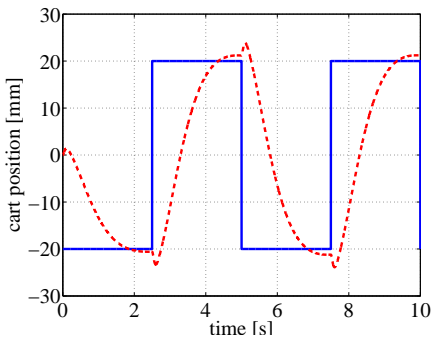


図 4: 位置 x_c [mm]

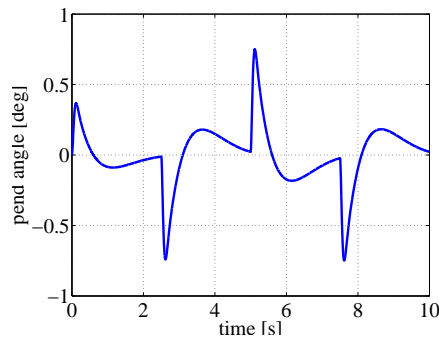


図 5: 角度 α [deg]

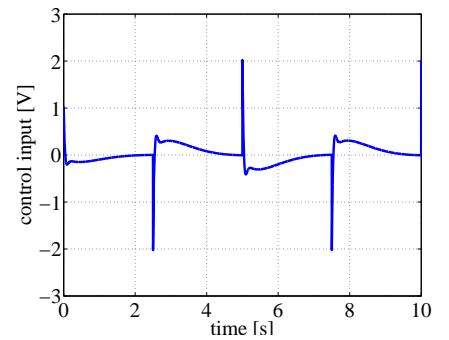


図 6: 制御入力 V_m [V]