2024 年 6 月 12 日
河合康典

2024 年度 計測制御工学 中間試験 (模範解答)
2024 年 6 月 12 日 5,6 限 (13:05-14:25)

注意：途中計算が解答欄に記入されていない場合は減点とする。

[問題 1] (配点 20 点)*学生の到達目標 (1),(2)

次のシステムにおいて，入力 $f(t)$，出力 $y = x_2$ となるようにブロック線図を描け。

$$\ddot{x}_1(t) = -\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) - 2x_1(t) + V_m(t)$$
$$2\ddot{x}_2(t) = -2x_2(t) - \dot{x}_1(t)$$

図 1-1: ブロック線図

[解答]

x_2 は

$$\ddot{x}_2(t) = -x_2(t) - \frac{1}{2}\dot{x}_1(t) \tag{1-1}$$

のようになる。ブロック線図は図 1-2 のようになる。

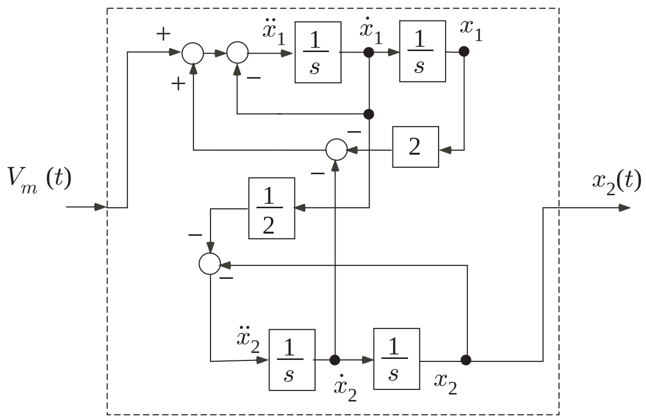

図 1-2: ブロック線図

[問題 2] (配点 25 点 ((1),(2):10 点,(3):5 点))
学生の到達目標 (1),(2)

次のシステム

$$2\ddot{z}(t) = -10z(t) - 12\dot{z}(t) + f(t)$$

において，z は台車の位置，$\dot{z}$ は台車の速度を表している。状態空間表現が次のように表されるとき，次の問いに答えよ。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

(1) 次の状態空間表現の A，B，C，D を答えよ。

$$u(t) = f(t),\ y(t) = \dot{z}(t),\ x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

(2) システムの固有値を答えよ。

(3) 固有値が同じで $x(t)$ が

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

でない，$x(t)$ と状態空間表現の A，B を答えよ。

[解答]

(1)

$$\ddot{z}(t) = -5z(t) - 6\dot{z}(t) + \frac{1}{2}f(t) \tag{2-1}$$

より，次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t) \tag{2-2}$$

よって，

$$\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}} \tag{2-3}$$

$$\underline{C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0} \tag{2-4}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & \lambda+6 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda+6) - (-5) \\
&= \lambda^2 + 6\lambda + 5 \\
&= (\lambda+5)(\lambda+1) \qquad (2\text{-}5)
\end{aligned}
$$

となる。よって，固有値は，-1, -5 となる。

(3)

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) + \ddot{z}(t) &= \dot{z}(t) - 5z(t) - 6\dot{z}(t) + \frac{1}{2}f(t) \\
&= -5z(t) - 5\dot{z}(t) + \frac{1}{2}f(t) \\
&= -5(z(t) + \dot{z}(t)) + \frac{1}{2}f(t)
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}6)
$$

より，次のようになる。

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t)+\dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t)+\dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t) \qquad (2\text{-}7)
$$

よって，

$$
\underline{x = \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t)+\dot{z}(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}} \qquad (2\text{-}8)
$$

[問題 3] (配点 15 点)*学生の到達目標 (4)

線形システム

$$
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)
$$

における A, B が以下のように与えられたとき，可制御性を可制御性行列を用いて判別して，可制御または可制御ではないか答えよ。

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

[解答]

$$
AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}1)
$$

$$
\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} = 2 \qquad (3\text{-}2)
$$

よって，可制御である。

(別解)

$$
\begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad (3\text{-}3)
$$

よって，可制御である。

[問題 4] (配点 20 点)*学生の到達目標 (4)

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について，$A_{cl} := A + BK$ の固有値 $\lambda = \lambda_1$，λ_2 を $p_1 = -2, p_2 = -8$ とする次式の状態フィードバック形式のコントローラ k_1，k_2 を答えよ。

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t),\quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

[解答]

A_{cl} は

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 + k_1 & -8 + k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-1}$$

A_{cl} の特性方程式は

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 7 - k_1 & \lambda + 8 - k_2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 8 - k_2) + (7 - k_1) \\ &= \lambda^2 + (8 - k_2)\lambda + 7 - k_1 \end{aligned} \tag{4-2}$$

となる。よって

$$8 - k_2 = -(p_1 + p_2) \tag{4-3}$$

$$7 - k_1 = p_1 p_2 \tag{4-4}$$

となるため (4-3) 式から

$$\begin{aligned} k_2 &= 8 + p_1 + p_2 \\ &= 8 - 2 - 8 = \underline{-2} \end{aligned} \tag{4-5}$$

(4-4) 式から

$$\begin{aligned} k_1 &= 7 - p_1 p_2 \\ &= 7 - (-2)(-8) = \underline{-9} \end{aligned} \tag{4-6}$$

となる。

[問題 5] (配点 20 点)*学生の到達目標 (3)

線形システム

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0 \\ &y(t) = Cx(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

において，遷移行列 e^{At} を答えよ。ただし，付録のラプラス変換表を用いてよい。

[解答] ラプラス変換を用いる場合

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 7 & s+8 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+8)+7} \begin{bmatrix} s+8 & 1 \\ -7 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+8s+7} \begin{bmatrix} s+8 & 1 \\ -7 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+7)} \begin{bmatrix} s+8 & 1 \\ -7 & s \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-1}$$

と分解でき，係数行列 K_1，K_2 を用いて次のように分解できる。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s+1} K_1 + \frac{1}{s+7} K_2 \tag{5-2}$$

係数行列 K_1，K_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_1 &= (s+1)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{s+7} \begin{bmatrix} s+8 & 1 \\ -7 & s \end{bmatrix} \Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-3}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= (s+7)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-7} \\ &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s+8 & 1 \\ -7 & s \end{bmatrix} \Bigg|_{s=-7} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-4}$$

遷移行列は次のようになる。

$$\underline{e^{At} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} e^{-7t}} \tag{5-5}$$

対角化を用いる場合

固有値を求める。

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 7 & s+8 \end{vmatrix} = s(s+8) + 7 \\ &= s^2 + 8s + 7 = (s+1)(s+7) \end{aligned} \tag{5-6}$$

ゆえに，固有値は以下のようになる。

$$\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -7 \tag{5-7}$$

固有ベクトル v_1，v_2 を定義する。λ_1 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 I - A)v_1 = 0\\ &\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 7 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5-8}$$

よって，固有ベクトル v_1 は次のようになる。

$$v_1 = \alpha\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \tag{5-9}$$

λ_2 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix}-7 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5-10}$$

よって，固有ベクトル v_2 は次のようになる。

$$v_2 = \beta\begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix} \tag{5-11}$$

ここで，

$$S = \begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\alpha & -7\beta\end{bmatrix} \tag{5-12}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-7t}\end{bmatrix} \tag{5-13}$$

となるから

$$\begin{aligned}
e^{At} &= Se^{\Lambda t}S^{-1}\\
&= \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\alpha & -7\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-7t}\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{6\alpha\beta}\right)\begin{bmatrix}-7\beta & -\beta\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}\\
&= -\frac{1}{6\alpha\beta}\begin{bmatrix}\alpha e^{-t} & \beta e^{-6t}\\ -\alpha e^{-t} & -7\beta e^{-6t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7\beta & -\beta\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}\\
&= -\frac{1}{6\alpha\beta}\begin{bmatrix}-7\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-7t} & -\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-7t}\\ 7\alpha\beta e^{-t} - 7\alpha\beta e^{-7t} & \alpha\beta e^{-t} - 7\alpha\beta e^{-7t}\end{bmatrix}\\
&= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7e^{-t} + e^{-7t} & -e^{-t} + e^{-7t}\\ 7e^{-t} - 7e^{-7t} & e^{-t} - 7e^{-7t}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}7 & 1\\ -7 & -1\end{bmatrix}e^{-t} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -7 & -7\end{bmatrix}e^{-7t}
\end{aligned} \tag{5-14}$$

ラプラス変換表

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位インパルス関数 $\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$	1	単位ステップ関数 $u_s(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{t^n}{n!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$