2024年度 計測制御工学 第4回資料

第 3 章 線形システムの時間応答

3.1 1次システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

キーワード：遷移行列，時間応答

学習目標：遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。

1

3 線形システムの時間応答

3.1 1次システムの時間応答

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = cx(t) + du(t) \qquad (3.1)$$

零入力応答 $u(t) = 0$

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = cx(t) \qquad (3.2)$$

(3.2) 式から

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \Rightarrow \int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int a\, dt \Rightarrow log\, x(t) = at + C$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{at+C}$$

初期条件 $x(0) = e^C = x_0$

$$x(t) = e^{at}x_0$$
$$y(t) = ce^{at}x_0$$

2

零状態応答 $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad (3.13)$$

$x(t) = e^{at}z(t)$ と仮定して両辺を微分すると

$$\dot{x}(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

(3.13) 式を代入する

$$\underline{ax(t)} + bu(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

$e^{at}z(t)$

$$ae^{at}z(t) + bu(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

$$e^{at}\dot{z}(t) = bu(t)$$
$$\dot{z}(t) = e^{-at}bu(t)$$
$$z(t) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + \alpha$$

3

$$z(t) = e^{-at}x(t) \quad \Leftarrow \quad x(t) = e^{at}z(t)$$

$z(0) = e^{-a\times 0}\underline{x(0)} = 0$ より

$x(0) = 0$

$$\alpha = z(0) - \int_0^0 e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau = z(0) = 0$$

よって

$$x(t) = e^{at}z(t) = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

任意の時間応答（零入力応答＋零状態応答）

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = ce^{at}x_0 + c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

4

【例3.2】

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$y(t) = c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

$$y(t) = 1\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{K}{T}Ed\tau + 0 \cdot u(t)$$
$$= \frac{KE}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}d\tau$$

$\tilde{\tau} = t - \tau$ とおく $\quad \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -1$

τ	$0 \rightarrow t$
$\tilde{\tau}$	$t \rightarrow 0$

$$y(t) = -\frac{KE}{T}\int_t^0 e^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}d\tilde{\tau} = \frac{KE}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}d\tilde{\tau}$$
$$= \frac{KE}{T}\left[-Te^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}\right]_0^t = KE\left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)$$

5

[問題 3.1(2)]

次のシステムにおいて，$u(t) = 1\ (t \geq 0)$を加えたときの$y(t)$ を求めよ。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

6

3 線形システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (3.27)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

遷移行列（行列指数関数）

$$e^{At} := I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots$$

例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ とすると

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t}$$
$$= I + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k + \cdots$$

となる

7

$$e^{A\times 0} = I$$

$$e^{A\times 0} = I + \underbrace{0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=0} + \underbrace{\frac{0^2}{2!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2}_{=0} + \cdots + \underbrace{\frac{0^k}{k!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k}_{=0} + \cdots$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(I + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k + \cdots\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k + \cdots$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=A}\underbrace{\left(I + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{k-1} + \cdots\right)}_{=e^{At}}$$

8

$$A\int_0^t e^{A\tau}d\tau = e^{At} - I$$

$A_1A_2 = A_2A_1$ ならば $e^{A_1t}e^{A_2t} = e^{(A_1+A_2)t}$

$$e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

9

零入力応答 $u(t) = 0$

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad (3.32)$$
$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

ラプラス変換による遷移行列の求め方

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$\Rightarrow sx(s) - x_0 = Ax(s)$$
$$\Rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$
$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x_0$$

(3.32) 式と比較して

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

10

[例3.4](1)

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+10)(s+1)}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s+10}K_1 + \frac{1}{s+1}K_2$$

$$K_1 = (s+10)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-10} = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-10}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = (s+1)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-1} = \frac{1}{s+10}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-1}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

11

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+10)(s+1)}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s+10}K_1 + \frac{1}{s+1}K_2$$

$$\underbrace{\frac{1}{(s+10)(s+1)}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}}_{=(sI-A)^{-1}} = \frac{1}{s+10}K_1 + \frac{1}{s+1}K_2$$

両辺に $s+10$ **をかける**

$$\underbrace{\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}}_{=(s+10)(sI-A)^{-1}} = K_1 + \frac{s+10}{s+1}K_2$$

$s = -10$ **を代入**

$$\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-10} = K_1 + 0$$

12

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+10}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix} + \frac{1}{s+1}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}e^{-10t} + \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}e^{-t}\right)$$

$$y(t) = ce^{At}x_0$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}e^{-10t} + \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}e^{-10t} + \begin{bmatrix}10 & 1\end{bmatrix}e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\left(-1\times e^{-10t} + 10\times e^{-t}\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(10^{-t} - e^{-10t}\right)$$

13

[問題 3.2(1)]

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad c = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\quad x_0 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

が与えられたとき，ラプラス変換を利用して遷移行列 e^{At} を求めよ。また，零入力 $y(t)$ を求めよ。

14

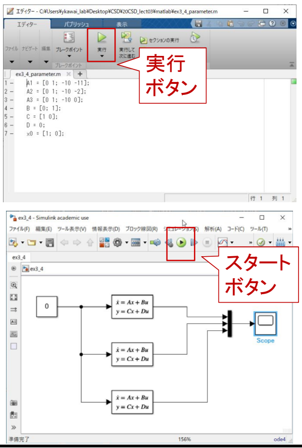
[MATLAB演習]

【例3.4】

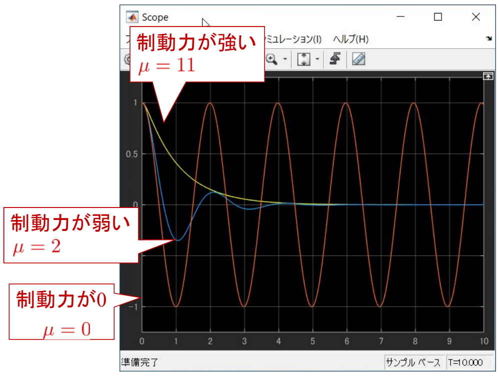
ex3_4.mdl

ex3_4_parameter.m

A1 = [0 1; -10 -11];
A2 = [0 1; -10 -2];
A3 = [0 1; -10 0];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;
x0 = [1; 0];



15



16

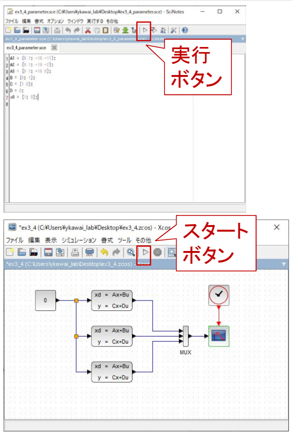
[Scilab演習]

【例3.4】

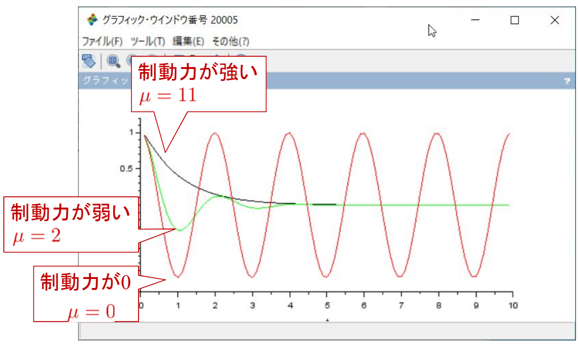
ex3_4.zcos

ex3_4_parameter.sce

A1 = [0 1; -10 -11];
A2 = [0 1; -10 -2];
A3 = [0 1; -10 0];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;
x0 = [1; 0];



17



18

［ MATLAB演習 ］

3.4.1 部分分数分解

［ Scilab演習 ］

```
clear
s=poly(0,'s');
numQ11 = s+11;
numQ12 = 1;
numQ21 = -10;
numQ22 = s;
denQ1 = s+10;
denQ2 = s+1;
k11_1 = residu(numQ11,denQ1,denQ2)
k11_2 = residu(numQ11,denQ2,denQ1)
k12_1 = residu(numQ12,denQ1,denQ2)
k12_2 = residu(numQ12,denQ2,denQ1)
k21_1 = residu(numQ21,denQ1,denQ2)
k21_2 = residu(numQ21,denQ2,denQ1)
k22_1 = residu(numQ22,denQ1,denQ2)
k22_2 = residu(numQ22,denQ2,denQ1)
K1 = [k11_1 k12_1; k21_1 k22_1]
K2 = [k11_2 k12_2; k21_2 k22_2]
```

19

第 3 章 線形システムの時間応答

3.1 1次システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

キーワード：遷移行列，時間応答

学習目標：遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。

20