

第 4 章 状態フィードバックによる制御

- 4.1 状態フィードバックによるレギュレータ制御
- 4.2 可制御性

キーワード：状態フィードバック, 可制御性

学習目標：状態フィードバックにより, 可安定, 可制御を理解する。

1

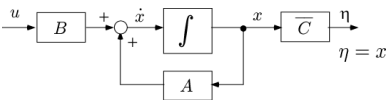
4 状態フィードバックによる制御

4.1 状態フィードバックによるレギュレータ制御

システム

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases}$$

$x(t) \in R^n$:状態変数 $u(t) \in R^p$:操作量 $\eta(t) \in R^r$:観測量
状態変数 $x(t)$ がすべて利用可能 ($\bar{C} = I$)



2

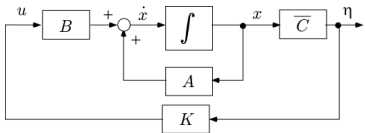
レギュレータ制御

システム $\mathcal{P}$ が与えられたとき, 任意の初期状態 $x(0) = x_0$ に対し, 状態変数 $x(t)$ を $x(t) \rightarrow 0$ に制御する。

状態フィードバック形式のコントローラ

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t), \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & \cdots & k_{pn} \end{bmatrix} \quad (\bar{C} = I)$$

$$\eta = x$$



3

レギュレータ問題 (定置制御)

一定の値に保持

例: 人工衛星の姿勢制御など



<http://www.jaxa.jp/projects/sat/>

サーボ問題 (追従制御)

目標値に良好に追従

例: ロケットの自動操縦など



http://www.jaxa.jp/projects/rockets/h3/index_j.html

4

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases} \quad (\bar{C} = I)$$

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t),$$

これらから

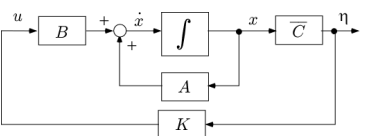
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t) = A_{cl}x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{A_{cl}t}x_0$$

A_{cl} の固有値の実部がすべて負となるように K を選ぶことができれば

$$x(t) = e^{A_{cl}t}x_0 \rightarrow 0$$

システムが可安定である



5

【例】可安定

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [K_1 \quad K_2]$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] = \begin{bmatrix} \frac{K_1-1}{R_1 C_1} & \frac{K_2}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

$$|sI - (A + BK)| = \begin{vmatrix} s - \frac{K_1-1}{R_1 C_1} & -\frac{K_2}{R_1 C_1} \\ 0 & s + \frac{1}{R_2 C_2} \end{vmatrix} = \left(s - \frac{K_1-1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)$$

固有値 $\frac{K_1-1}{R_1 C_1}, -\frac{1}{R_2 C_2}$ K に関係なく安定

$K_1 < 1$ なら固有値の実部が負 $\Rightarrow$ 可安定

6

4 状態フィードバックによる制御

4.2 可制御性

システムが**可制御**

操作量 $u(t)$ を適当に操作することで, システムの状態 $x(t)$ を設計者の指定した時間に目標とする状態へ移すことが可能

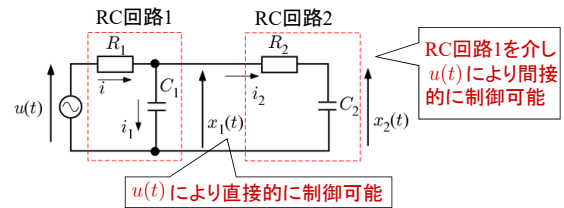
可制御性の定義

線形システム(4.2)式に対し, ある有限の時間 $t = t_f$ で任意の初期状態 $x(0) = x_0$ を任意の目標とする状態 x_f に移す操作量 $u(t)$ が存在することを“システムが可制御である”という。また, システムが可制御でないとき, “システムが不可制御である”という。

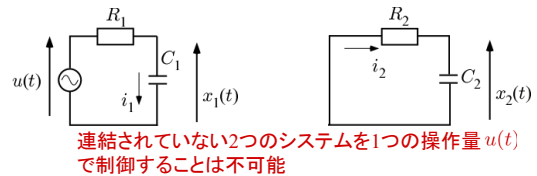
$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

7

【例4.1】可制御



【例4.1】不可制御



8

可制御性の判別

可制御行列 V_C , 可制御性グラミアン $W_C(t_f)$

$$V_C := \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in R^{n \times np}$$

$$W_C(t_f) := \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau \in R^{n \times n}$$

“線形システム(4.2)式が可制御である” (A, B) が可制御ことと, 以下の条件(a)や条件(b)は等価

(a) 可制御性行列 V_C がランク条件を満足する

$$\text{rank } V_C = n \quad (\text{行フルランク})$$

$$\text{正方行列の場合 } \text{rank } V_C = n \Leftrightarrow |V_C| \neq 0$$

(b) 可制御性グラミアン $W_C(t_f)$ が正則

正則: 逆行列が存在する

9

[例4.2]

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{R_1+R_2}{R_1^2 R_2 C_1^2} \\ 0 & \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{bmatrix}$$

正方行列の場合 $\text{rank } V_C = n \Leftrightarrow |V_C| \neq 0$

$$|V_C| = \frac{1}{R_1^2 R_2 C_1^2 C_2} \neq 0 \quad \text{可制御}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1^2 C_1^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |V_C| = 0 \quad \text{不可制御}$$

10

[問題4.1]

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11

[問題4.1]

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|V_C| = -2 \neq 0 \quad \text{可制御}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|V_C| = 0 \quad \text{不可制御}$$

12

(a) 可制御性行列 V_C がランク条件を満足する

$$\text{rank} V_C = n \quad (\text{行フルランク})$$

(証明) 可制御 $\Rightarrow$ (a)

$$x(t_f) = x_f = e^{At_f} x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

両辺に左から e^{-At_f} をかける

$$\begin{aligned} e^{-At_f} x(t_f) - x_0 &= \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \left(I + t(-A) + \frac{t^2}{2!} A^2 \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) B u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

ケーリー・ハミルトンの定理

$$A^n = -(\alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) \quad \text{次数を下げるができる}$$

よって

$$e^{-At_f} x(t_f) - x_0 = \int_0^{t_f} (\beta_{n-1}(-\tau) A^{n-1} + \cdots + \beta_1(-\tau) A + \beta_0(-\tau) I) B u(\tau) d\tau$$

13

$$\begin{aligned} e^{-At_f} x(t_f) - x_0 &= A^{n-1} B \int_0^{t_f} \beta_{n-1}(-\tau) u(\tau) d\tau + AB \int_0^{t_f} \beta_1(-\tau) u(\tau) d\tau \\ &\quad + B \int_0^{t_f} \beta_0(-\tau) u(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{V_C} \begin{bmatrix} \int_0^{t_f} \beta_0(-\tau) u(\tau) d\tau \\ \int_0^{t_f} \beta_1(-\tau) u(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} \beta_{n-1}(-\tau) u(\tau) d\tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

任意の $x(t_f)$, x_0 に対して, $u(t)$ が存在しないといけないため

$$\text{rank} V_C = n \quad (\text{行フルランク})$$

14

ケーリー・ハミルトンの定理

$$A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

【例】

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{vmatrix} = s(s+11) + 10 = s^2 + 11s + 10$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}^2 + 11 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & -11 \\ 110 & 111 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -110 & -121 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

15

[例] $\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = 1$ のとき

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 3u_2 + 5u_3 \\ 2(u_1 + 3u_2 + 5u_3) \end{bmatrix}$$

どのように u_1, u_2, u_3 を設定しても, 2行目は1行目の2倍

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{を満たす } u_1, u_2, u_3 \text{ を設定せよ}$$

u_3 を与えたとき

$$\begin{bmatrix} 1 - 5u_3 \\ 4 - 10u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

u_1 を与えたとき

$$\begin{bmatrix} 1 - u_1 \\ 4 - 2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - 5u_3 \\ 4 - 10u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - u_1 \\ 4 - 2u_1 \end{bmatrix}$$

は逆行列が存在しないので, 求まらない

16

[例] $\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 2$ のとき

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 3u_2 + 5u_3 \\ 2u_1 + 6u_2 + 5u_3 \end{bmatrix}$$

任意に設定した2行目と1行目を満たす u_1, u_2, u_3 が存在

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{を満たす } u_1, u_2, u_3 \text{ を設定せよ}$$

u_3 を与えたとき

$$\begin{bmatrix} 1 - 5u_3 \\ 4 - 10u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

u_1 を与えたとき

$$\begin{bmatrix} 1 - u_1 \\ 4 - 2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - 5u_3 \\ 4 - 10u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - u_1 \\ 4 - 2u_1 \end{bmatrix}$$

は逆行列が存在しないので, 求まらない

$$= \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - u_1 \\ 4 - 2u_1 \end{bmatrix}$$

求める

17

(MATLABが使える人は)

[MATLAB演習]

4.4.1 可制御性
問題 4.8(1)

18

第 4 章 状態フィードバックによる制御

4.1 状態フィードバックによるレギュレータ制御

4.2 可制御性

キーワード：状態フィードバック, 可制御性

学習目標：状態フィードバックにより, 可安定, 可制御を理解する。

19