2024年度 計測制御工学 前期 第7回レポート (模範解答)

EM専攻1年 番号 ________ 氏名 ____________________

【問題1】

固有値を求める方法で下記の問いに答えよ。

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は可制御である。$A_{cl} := A + BK$ の固有値 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$ を $p_1 = -3, p_2 = -4$ とする次式の状態フィードバック形式のコントローラ k_1，k_2 を設計せよ。

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t), \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

【解答】

可制御性行列は

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

となり，

$$|V_C| = -1 \neq 0$$

より，可制御である。

A_{cl} は

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + k_1 & -2 + k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1-1}$$

A_{cl} の特性方程式は

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 - k_1 & \lambda + 2 - k_2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 2 - k_2) + (1 - k_1) \\ &= \lambda^2 + (2 - k_2)\lambda + 1 - k_1 \end{aligned} \tag{1-2}$$

となる。よって

$$2 - k_2 = -(p_1 + p_2) \tag{1-3}$$

$$1 - k_1 = p_1 p_2 \tag{1-4}$$

となるため (1-3) 式から

$$\begin{aligned} k_2 &= 2 + p_1 + p_2 \\ &= 2 - 3 - 4 = \underline{-5} \end{aligned} \tag{1-5}$$

(1-4) 式から

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 - p_1 p_2 \\ &= 1 - (-3)(-4) = \underline{-11} \end{aligned} \tag{1-6}$$

となる。

【問題2】

アッカーマンの極配置アルゴリズムを用いて【問題1】と同じ問題を解け。

【解答】

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - (-3))(\lambda - (-4)) \\ &= \lambda^2 + 7\lambda + 12 \end{aligned} \tag{2-1}$$

よって，$\delta_0 = 12$，$\delta_1 = 7$

$$\begin{aligned} \Delta_A &= A^2 + \delta_1 A + \delta_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^2 + 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-2}$$

可制御性行列 V_c は

$$V_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

より，

$$V_c^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

よって，

$$\begin{aligned} k &= -e \cdot V_c^{-1} \Delta_A \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-5}$$

【問題 3】

次の線形システムを可制御標準形に変換した A_c, B_c, C_c を求めよ。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

【解答】

$$\begin{aligned} \left|\lambda I - A\right| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2) + 1 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{aligned} \tag{3-1}$$

よって，$\alpha_1 = 2$，$\alpha_0 = 1$ となる。

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

可制御性行列は

$$V_c = [B\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

変換行列 T_c は

$$T_c = (V_c M_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

よって，

$$\begin{aligned} A_c(t) &= T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_c(t) = T_c B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c(t) = C T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$