2024年度 計測制御工学 第7回資料

第 4 章 状態フィードバックによる制御

4.3 極配置によるコントローラ設計

キーワード： 極配置

学習目標：状態フィードバックによりレギュレータ制御を理解する。極配置法について理解する。

4 状態フィードバックによる制御
4.3 極配置によるコントローラ設計

極配置法

極が指定した値となるようにKを設計する

可制御性と極配置の実現可能性との関係

以下の条件(i)と条件(ii)は等価である。

(i) 線形システム(4.2)式が可制御である。

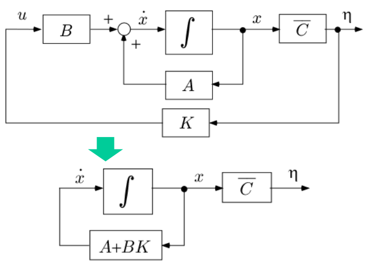
(ii) Kを適当に選ぶことにより，$A+BK$ の固有値を，任意の値に設定可能である。

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), & x(0)=x_0\\ \eta(t)=\bar{C}x(t) & (\bar{C}=I)\end{cases}$$

$\mathcal{K}: u(t)=Kx(t),$

これらから

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+BKx(t)\\&=\underbrace{(A+BK)}_{A_{cl}}x(t)\\&=A_{cl}x(t)\end{aligned}$$



[例4.3]

(1) $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $\quad u(t)=kx(t)=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$

可制御の確認

$$V_C=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -6\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$|V_C|=4\times 2=8\neq 0$ **可制御**

$$\begin{aligned}A_{cl}&:=A+BK\\&=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k_1 & 2k_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-3+2k_1 & 1+2k_2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$A_{cl}:=A+BK$ の特性方程式

$$\begin{aligned}|\lambda I-A_{cl}|&=\begin{vmatrix}\lambda+3-2k_1 & -(1+2k_2)\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}\\&=(\lambda+3-2k_1)(\lambda+2)-2(1+2k_2)\\&=\lambda^2+(3-2k_1)\lambda+2\lambda+2(3-2k_1)-2(1+2k_2)\\&=\lambda^2+(5-2k_1)\lambda+4(1-k_1-k_2)=0\end{aligned}$$

A_{cl} の固有値 $\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2$ を指定した値 $p=p_1,\ p_2$ とするには

$$(\lambda-p_1)(\lambda-p_2)=\lambda^2-(p_1+p_2)\lambda+p_1p_2$$

$$\begin{cases}5-2k_1=-(p_1+p_2)\\ 4(1-k_1-k_2)=p_1p_2\end{cases}$$

$$k_1=\frac{5+p_1+p_2}{2},\quad k_2=-\frac{6+2p_1+2p_2+p_1p_2}{4}$$

① $p_1=-4+4j,\ p_2=-4-4j$

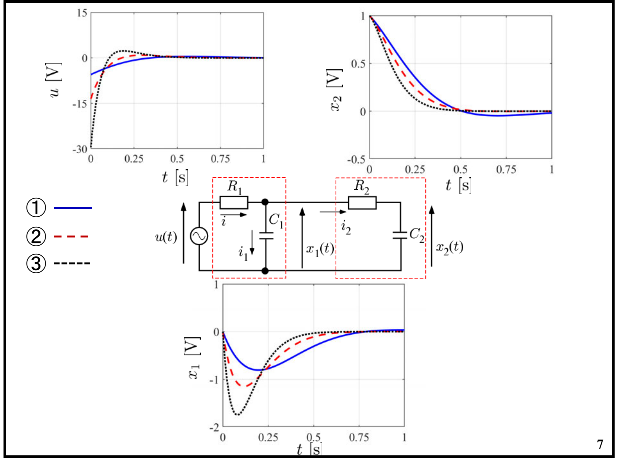
$k_1=-\frac{3}{2},\ k_2=-\frac{11}{2}$

② $p_1=-8+4j,\ p_2=-8-4j$

$k_1=-\frac{11}{2},\ k_2=-\frac{27}{2}$

③ $p_1=-12+4j,\ p_2=-12-4j$

$k_1=-\frac{19}{2},\ k_2=-\frac{59}{2}$



7

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

可制御の確認

$$V_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$|V_C| = 0$ 　不可制御

$A_{cl} := A + BK$ の特性方程式

$$|\lambda I - A_{cl}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 - 2k_1 & -2k_2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2 - 2k_1)(\lambda + 2) = 0$$

A_{cl} の固有値 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$ を指定した値 $p = p_1,\ p_2$ とするには

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 + 2k_1,\ \underline{\lambda_2 = -2}$$

コントローラにより指定することができない

8

1入力システムに対するアッカーマンの極配置アルゴリズム

可制御性行列を利用

[ステップ1]

与えられた $p_1, \cdots, p_n$ に対し，多項式

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)\cdots(\lambda - p_n)$$
$$= \lambda^n + \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \delta_1\lambda + \delta_0$$

の係数 $\delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$ を求め，次式を計算

$$\Delta_A = A^n + \delta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \delta_1 A + \delta_0 I$$

[ステップ2]

コントローラのゲイン k を次式で与える

$$k = -eV_c^{-1}\Delta_A$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$V_c = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

9

[例4.3]（アッカーマン）

(1)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

[ステップ1]

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)$$
$$= \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1p_2$$

$$\Delta_A = A^2 - (p_1 + p_2)A + p_1p_2 \cdot I$$
$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^2 - (p_1 + p_2)\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + p_1p_2 \cdot I$$
$$= \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} - (p_1 + p_2)\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + p_1p_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2 \end{bmatrix}$$

10

[ステップ2]

$$V_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$V_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

よって

$$k = -eV_c^{-1}\Delta_A$$
$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} \frac{-10 - 2(p_1 + p_2)}{4} & \frac{6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2}{4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{5 + p_1 + p_2}{2} & -\frac{6 + 2(p_1 + p_2) + p_1p_2}{4} \end{bmatrix}$$

11

可制御標準形に基づく1入力システムの極配置

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

可制御標準形

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$
$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

12

可制御標準形への変換手順

［ステップ1］

A の特性多項式の係数を求める。

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

［ステップ2］

可制御性行列 V_c および M_c を求める。

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

［ステップ3］

$$T_c = (V_cM_c)^{-1} = M_c^{-1}V_c^{-1}$$

13

［ステップ4］

$$x_c(t) = T_c x(t)$$

$$A_c(t) = T_cAT_c^{-1},\ B_c(t) = T_cB,\ C_c(t) = CT_c^{-1}$$

$$\dot{x}_c(t) = A_cx_c(t) + B_cu(t)$$
$$y(t) = C_cx_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

14

［ 例4.4］

(1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

［ステップ1］

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{\boxed{+5}}_{\alpha_1}\lambda \underbrace{\boxed{+4}}_{\alpha_0}$$

［ステップ2］

$$V_c = [b\ Ab] = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

［ステップ3］

$$T_c = (V_cM_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

15

［ステップ4］

$$x_c(t) = T_cx(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x_2(t) \\ \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A_c(t) = T_cAT_c^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_c(t) = T_cB = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c(t) = CT_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

16

可制御標準形に基づく1入力システムの極配置アルゴリズム

［ステップ1］

与えられた $p_1, \cdots, p_n$ に対し，多項式

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)\cdots(\lambda - p_n)$$
$$= \lambda^n + \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \delta_1\lambda + \delta_0$$

の係数 $\delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$ を求める。

［ステップ2］

コントローラのゲイン k を次式で与える

$$k = k_cT_c$$
$$k_c = \begin{bmatrix} \alpha_0 - \delta_0 & \alpha_1 - \delta_1 & \cdots & \alpha_{n-1} - \delta_{n-1} \end{bmatrix}$$

17

［ 例4.5］

$$u(t) = k_cx_c(t) = \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -8 + 4j,\ p_2 = -8 - 4j$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - (A_c + B_ck_c)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 - k_{c1} & \lambda + 5 - k_{c2} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 \boxed{+\underbrace{\boxed{(5}}_{\alpha_1} - k_{c2})}\lambda \boxed{\underbrace{\boxed{+4}}_{\alpha_0} - k_{c1}}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)$$
$$= (\lambda - (-8 + 4j))(\lambda - (-8 - 4j))$$
$$= \lambda^2 \underbrace{\boxed{+16}}_{\delta_1}\lambda \underbrace{\boxed{+80}}_{\delta_0}$$

18

係数を比較

$$\underset{\alpha_0}{\boxed{4}} - k_{c1} = \underset{\delta_0}{\boxed{80}} \quad \Rightarrow \quad k_{c1} = -76 \qquad k_{c1} = \alpha_0 - \delta_0$$

$$\underset{\alpha_1}{\boxed{5}} - k_{c2} = \underset{\delta_1}{\boxed{16}} \quad \Rightarrow \quad k_{c2} = -11 \qquad k_{c2} = \alpha_1 - \delta_1$$

$$u(t) = k_c x_c(t) = \underset{k}{\boxed{k_c T_c}} x(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -76 & -11 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

19

[MATLAB演習]

4.4.2(a) 極配置

4.4.3(c) アッカーマンの極配置

4.4.3 状態フィードバック制御のシミュレーション

20

第 4 章 状態フィードバックによる制御

4.3 極配置によるコントローラ設計

キーワード : 極配置

学習目標 : 状態フィードバックによりレギュレータ制御を理解する。極配置法について理解する。

21