第 4 章　状態フィードバックによる制御

4.3　極配置によるコントローラ設計

キーワード：極配置

学習目標：状態フィードバックによりレギュレータ制御を理解する。極配置法について理解する。

4 状態フィードバックによる制御

4.3 極配置によるコントローラ設計

極配置法

極が指定した値となるようにKを設計する

可制御性と極配置の実現可能性との関係

以下の条件(i)と条件(ii)は等価である。

(i) 線形システム(4.2)式が可制御である。

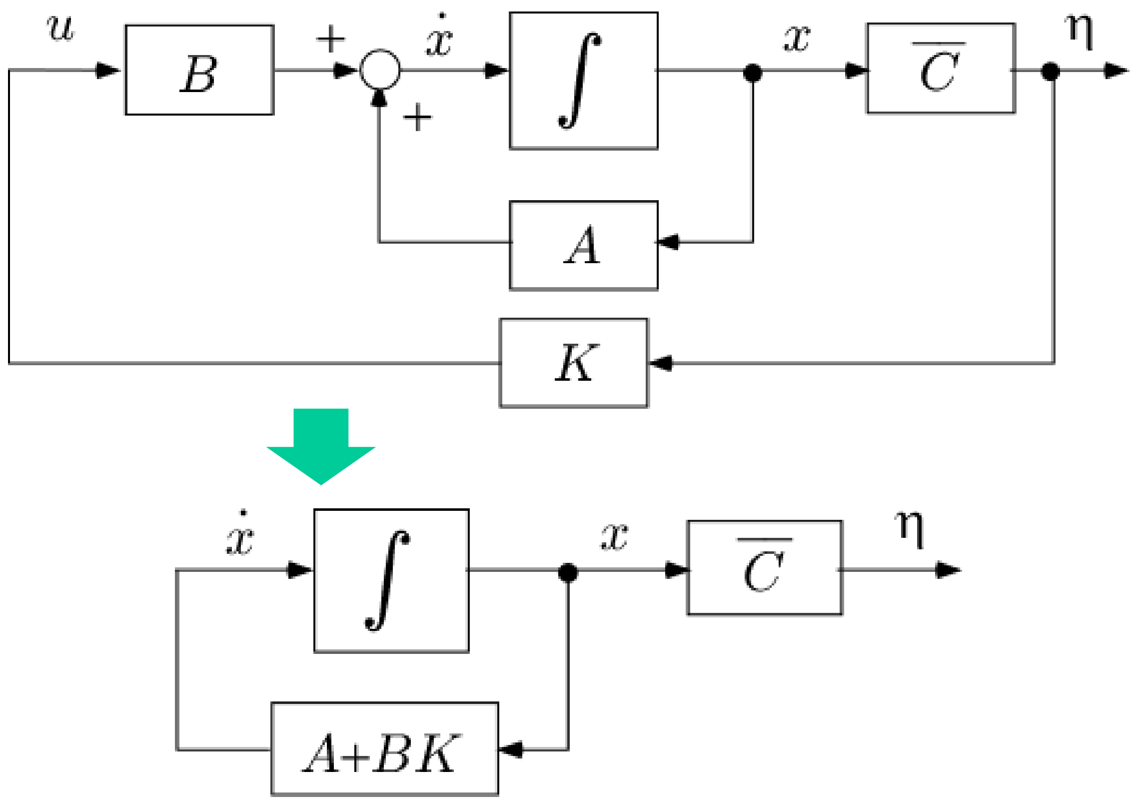
(ii) Kを適当に選ぶことにより，$A+BK$の固有値を，任意の値に設定可能である。

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \qquad (\bar{C} = I) \end{cases}$$

$$\mathcal{K}: u(t) = Kx(t),$$

これらから

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BKx(t) \\ &= \underbrace{(A + BK)}_{A_{cl}}x(t) \\ &= A_{cl}x(t) \end{aligned}$$



[例4.3]

(1)
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

可制御の確認

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|V_C| = 4 \times 2 = 8 \neq 0$$ 可制御

$$A_{cl} := A + BK$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 & 2k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 + 2k_1 & 1 + 2k_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$A_{cl} := A + BK$ の特性方程式

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 - 2k_1 & -(1+2k_2) \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + 3 - 2k_1)(\lambda + 2) - 2(1 + 2k_2) \\
&= \lambda^2 + (3 - 2k_1)\lambda + 2\lambda + 2(3 - 2k_1) - 2(1 + 2k_2) \\
&= \lambda^2 + (5 - 2k_1)\lambda + 4(1 - k_1 - k_2) = 0
\end{aligned}
$$

A_{cl} の固有値 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$ を指定した値 $p = p_1,\ p_2$ とするには

$$
(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1 p_2
$$

$$
\begin{cases} 5 - 2k_1 = -(p_1 + p_2) \\ 4(1 - k_1 - k_2) = p_1 p_2 \end{cases}
$$

$$
k_1 = \frac{5 + p_1 + p_2}{2}, \quad k_2 = -\frac{6 + 2p_1 + 2p_2 + p_1 p_2}{4}
$$

① $p_1 = -4 + 4j,\ p_2 = -4 - 4j$

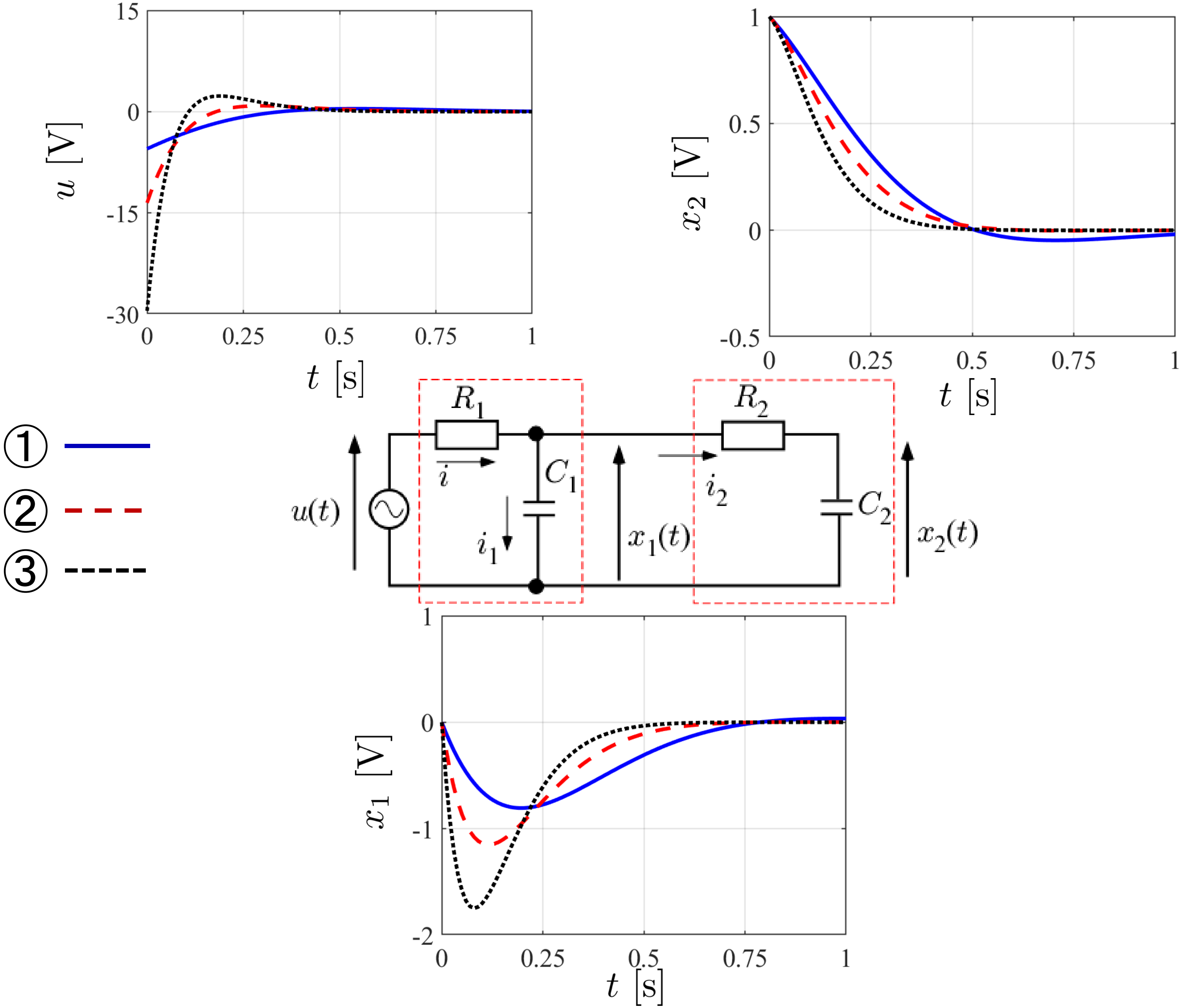
$$k_1 = -\frac{3}{2},\ k_2 = -\frac{11}{2}$$

② $p_1 = -8 + 4j,\ p_2 = -8 - 4j$

$$k_1 = -\frac{11}{2},\ k_2 = -\frac{27}{2}$$

③ $p_1 = -12 + 4j,\ p_2 = -12 - 4j$

$$k_1 = -\frac{19}{2},\ k_2 = -\frac{59}{2}$$


u [V]
15
0
-15
-30
t [s]
0
0.25
0.5
0.75
1
x2 [V]
1
0.5
0
-0.5
x1 [V]
-1
-2
①
②
③
R1
R2
C1
C2
i
i1
i2
u(t)
x1(t)
x2(t)

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

可制御の確認

$$V_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$|V_C| = 0$ 不可制御

$A_{cl} := A + BK$ の特性方程式

$$|\lambda I - A_{cl}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 - 2k_1 & -2k_2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2 - 2k_1)(\lambda + 2) = 0$$

A_{cl} の固有値 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$ を指定した値 $p = p_1,\ p_2$ とするには

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 + 2k_1,\ \underline{\lambda_2 = -2}$$

コントローラにより指定することができない

1入力システムに対するアッカーマンの極配置アルゴリズム

可制御性行列を利用

[ステップ1]

与えられた $p_1, \cdots, p_n$ に対し，多項式

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)\cdots(\lambda - p_n) \\ &= \lambda^n + \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \delta_1\lambda + \delta_0\end{aligned}$$

の係数 $\delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$ を求め，次式を計算

$$\Delta_A = A^n + \delta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \delta_1 A + \delta_0 I$$

[ステップ2]

コントローラのゲイン k を次式で与える

$$k = -eV_c^{-1}\Delta_A$$

$$\begin{aligned}e &= \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix} \\ V_c &= \begin{bmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix}\end{aligned}$$

[例4.3]（アッカーマン）

（1）

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(t) = kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

[ステップ1]

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \\ &= \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1 p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_A &= A^2 - (p_1 + p_2)A + p_1 p_2 \cdot I \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^2 - (p_1 + p_2)\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + p_1 p_2 \cdot I \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} - (p_1 + p_2)\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + p_1 p_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1 p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1 p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[ステップ2]

$$V_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$V_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} k &= -eV_c^{-1}\Delta_A \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1 p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1 p_2 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 + 3(p_1 + p_2) + p_1 p_2 & -5 - (p_1 + p_2) \\ -10 - 2(p_1 + p_2) & 6 + 2(p_1 + p_2) + p_1 p_2 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{-10-2(p_1+p_2)}{4} & \frac{6+2(p_1+p_2)+p_1 p_2}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5+p_1+p_2}{2} & -\frac{6+2(p_1+p_2)+p_1 p_2}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可制御標準形に基づく1入力システムの極配置

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

可制御標準形

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

可制御標準形への変換手順

[ステップ1]

A の特性多項式の係数を求める。

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

[ステップ2]

可制御性行列 V_c および M_c を求める。

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

[ステップ3]

$$T_c = (V_c M_c)^{-1} = M_c^{-1} V_c^{-1}$$

[ステップ4]

$$x_c(t) = T_c x(t)$$

$$A_c(t) = T_c A T_c^{-1},\ B_c(t) = T_c B,\ C_c(t) = C T_c^{-1}$$

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$
$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

[例4.4]

(1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

[ステップ1]

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{\boxed{+5}}_{\alpha_1}\lambda \underbrace{\boxed{+4}}_{\alpha_0}$$

[ステップ2]

$$V_c = [b\ \ Ab] = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[ステップ3]

$$T_c = (V_c M_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

［ステップ4］

$$x_c(t) = T_c x(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x_2(t) \\ \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A_c(t) = T_c A T_c^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_c(t) = T_c B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c(t) = C T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

可制御標準形に基づく1入力システムの極配置アルゴリズム

[ステップ1]

与えられた $p_1, \cdots, p_n$ に対し，多項式

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)\cdots(\lambda - p_n) \\
&= \lambda^n + \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \delta_1\lambda + \delta_0
\end{aligned}
$$

の係数 $\delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$ を求める。

[ステップ2]

コントローラのゲイン k を次式で与える

$$k = k_c T_c$$

$$k_c = \begin{bmatrix} \alpha_0 - \delta_0 & \alpha_1 - \delta_1 & \cdots & \alpha_{n-1} - \delta_{n-1} \end{bmatrix}$$

[例4.5]

$$u(t) = k_c x_c(t) = \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -8 + 4j,\ p_2 = -8 - 4j$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\lambda I - (A_c + B_c k_c)| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 - k_{c1} & \lambda + 5 - k_{c2} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \underbrace{(5 - k_{c2})}_{\alpha_1}\lambda + \underbrace{4 - k_{c1}}_{\alpha_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \\ &= (\lambda - (-8 + 4j))(\lambda - (-8 - 4j)) \\ &= \lambda^2 + \underbrace{16}_{\delta_1}\lambda + \underbrace{80}_{\delta_0} \end{aligned}$$

係数を比較

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\alpha_0} - k_{c1} = \underbrace{\boxed{80}}_{\delta_0} \quad \Rightarrow \quad k_{c1} = -76 \qquad k_{c1} = \alpha_0 - \delta_0$$

$$\underbrace{\boxed{5}}_{\alpha_1} - k_{c2} = \underbrace{\boxed{16}}_{\delta_1} \quad \Rightarrow \quad k_{c2} = -11 \qquad k_{c2} = \alpha_1 - \delta_1$$

$$u(t) = k_c x_c(t) = \underbrace{\boxed{k_c T_c}}_{k} x(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -76 & -11 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

[MATLAB演習]

4.4.2(a) 極配置

4.4.3(c) アッカーマンの極配置

4.4.3 状態フィードバック制御のシミュレーション

第 4 章　状態フィードバックによる制御

4.3　極配置によるコントローラ設計

キーワード：極配置

学習目標：状態フィードバックによりレギュレータ制御を理解する。極配置法について理解する。