

2024 年度 計測制御工学 前期 第 9 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 _____ 氏名 _____

【問題 1】

零入力の線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

が与えられたとき, $Q = I$ としたリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

の解 $P = P^T$ が正定であるかどうかを調べて, 漸近安定性を判別せよ。

【解答】

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & p_{11} + p_{12} \\ 2p_{22} & p_{12} + p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_{12} & 2p_{22} \\ p_{11} + p_{12} & p_{12} + p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

$$\begin{bmatrix} 4p_{12} & p_{11} + p_{12} + 2p_{22} \\ p_{11} + p_{12} + 2p_{22} & 2(p_{12} + p_{22}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって,

$$4p_{12} = -1 \quad (1-3)$$

$$p_{11} + p_{12} + 2p_{22} = 0 \quad (1-4)$$

$$2(p_{12} + p_{22}) = -1 \quad (1-5)$$

(2-5) 式より $p_{12} = -0.25$ 。(2-7) 式へ代入

$$\begin{aligned} 2(-0.25 + p_{22}) &= -1 \\ -0.25 + p_{22} &= -0.5 \\ p_{22} &= -0.25 \end{aligned} \quad (1-6)$$

(2-6) 式へ代入

$$p_{11} - 0.25 - 0.5 = 0 \Rightarrow p_{11} = 0.75 \quad (1-7)$$

よって, P は

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

となる。主座小行列は

$$0.75 > 0 \quad (1-9)$$

$$\begin{aligned} |P| &= 0.75 \times -0.25 - 0.25^2 \\ &= \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \\ &= -\frac{3}{16} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{4} < 0 \end{aligned} \quad (1-10)$$

となるため, 行列 P は正定でない。よって, 漸近安定でない。

【問題 2】

【問題 1】において, $Q_0 = [1 \ 0]$ としたリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q_0^T Q_0$$

の解 $P = P^T$ が正定であるかどうかを調べて, 漸近安定性を判別せよ。また, (Q_0, A) の可観測性を示せ。

【解答】

可観測性を調べる。

$$V_o = \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_o A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

よって, $\text{rank} V_o = 2$ より 可観測 である。

$$Q_0^T Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

より,

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & p_{11} + p_{12} \\ 2p_{22} & p_{12} + p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_{12} & 2p_{22} \\ p_{11} + p_{12} & p_{12} + p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\begin{bmatrix} 4p_{12} & p_{11} + p_{12} + 2p_{22} \\ p_{11} + p_{12} + 2p_{22} & 2(p_{12} + p_{22}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって,

$$4p_{12} = -1 \quad (2-5)$$

$$p_{11} + p_{12} + 2p_{22} = 0 \quad (2-6)$$

$$2(p_{12} + p_{22}) = 0 \quad (2-7)$$

(2-5) 式より $p_{12} = -0.25$ 。(2-7) 式へ代入

$$\begin{aligned} 2(-0.25 + p_{22}) &= 0 \\ -0.25 + p_{22} &= 0 \\ p_{22} &= 0.25 \end{aligned} \quad (2-8)$$

(2-6) 式へ代入

$$p_{11} - 0.25 + 0.5 = 0 \Rightarrow p_{11} = -0.25 \quad (2-9)$$

よって, P は

$$P = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

となる。主座小行列は

$$-0.25 > 0 \quad (2-11)$$

$$\begin{aligned} |P| &= -0.25 \times 0.25 - 0.25^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -\frac{2}{16} - \frac{1}{8} < 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

となるため, 行列 P は正定でない。よって, 漸近安定でない。